# Fondamenti di Grafica Tridimensionale

Paolo Cignoni
p.cignoni@isti.cnr.it
http://vcg.isti.cnr.it/~cignoni



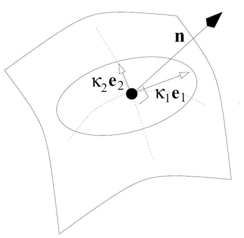
## Geometria Differenziale

- Consideriamo una superficie S 2manifold embedded in R3
  - Supponiamo di avere una parametrizzazione in due variabili che descriva $S(u,v) \rightarrow R^3$
  - Supponiamo che la sup sia continua e derivabile e che si possa avere per ogni punto il piano tangente ad S e perpendicolare alla normale *n*



## Curvatura di una superficie

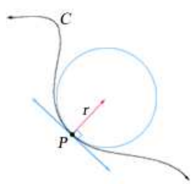
- Per ogni direzione $e_\theta$ nel piano tangente
- Si può definire la curvatura $\kappa^N(\theta)$ come la curvatura della curva che appartiene all'intersezione tra il piano che contiene N e $e_\theta$ e la superficie stessa






## Curvatura

- Curvature in un punto P è il reciproco del raggio di cerchio osculante (eg un cerchio che tocca la curva in P)
- Se si considera la curva come lo zero di una funzione f in $R^2$->R (pensate alle curve di livello), la curvatura è la divergenza del gradiente di f



## Curvatura nel piano

- La vera definizione è:

$$x(t), y(t) \quad una \quad curva \quad nel \quad piano$$
$$\phi \quad tangential\ angle$$
$$s \quad arc\ lenght$$

$$\kappa \equiv \frac{d\phi}{ds} = \frac{d\phi/dt}{ds/dt} = \frac{d\phi/dt}{\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}} = \frac{d\phi/dt}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

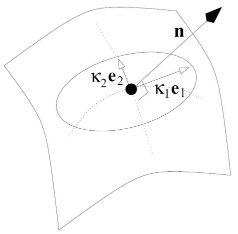
$$\kappa = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$



## Curvatura Superficie

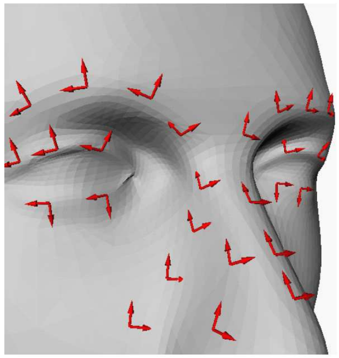
- Per ogni direzione ho una curvatura
- Considero le due direzioni lungo la quale la curvatura è max e min
- Si considerano positive se la direzione della curvatura nel piano concorda con la normale nel piano

$$\kappa_1, \kappa_2 \quad principal \quad curvatures$$
$$e_1, e_2 \quad principal \quad directions$$






## Curvature principali



## Curvatura Gaussiana e Media

- Def come prodotto delle curvature principali
  - Positiva per sfere
  - Negativa per iperboloidi

$$\kappa_G \equiv K \equiv \kappa_1 \cdot \kappa_2 \quad Gaussian \quad curvature$$
$$\bar{\kappa} \equiv H \equiv \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \quad Curvatura\ media$$

## Intrinseco Estrinseco

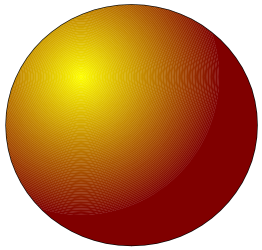
- La curvatura gaussiana è una proprietà ***intrinseca*** della superficie anche se è definita in maniera ***estrinseca***
  - La potrebbe determinare un abitante *a* bidimensionale della superficie stessa
  - Se *a* descrive un cerchio di raggio *r* intorno ad un punto P della sup percorrendo una lung. C(r) vale che:

$$K = \lim_{r \to 0} (2\pi r - C(r)) \cdot \frac{3}{\pi r^3}$$



## Curvatura Gaussiana

- Positiva e negativa





## Curvatura Media

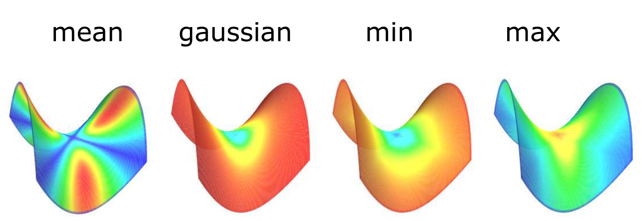
- Divergenza della normale alla superficie
- Strettamente correlata con il problema della minimizzazione dell'area di una sup.
- Se si considera un`area A intorno ad un punto

$$2\bar{\kappa} n = \lim_{diam(A) \to 0} \frac{\nabla A}{A}$$

- Dove è la derivata rispetto a xyz (e non alla param locale della superficie, in altre parole estrinseca e non intrinseca)



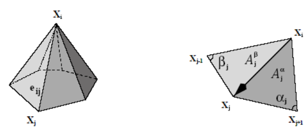
- Red > 0 Blue < 0, non nella stessa scala



## Curvatura media discreta

$$-\bar{\kappa}\,\mathbf{n} = \frac{1}{4A} \sum_{j \in N_1(i)} (\cot \alpha_j + \cot \beta_j)(x_j - x_i)$$

where $\alpha_j$ and $\beta_j$ are the two angles opposite to the edge in the two triangles having the edge $e_{ij}$ in common
$A$ is the sum of the areas of the triangles






## Curvatura Gaussiana discreta

- Ricordando che l 'integrale della curvatura gaussiana di una sup chiusa e' $4\pi$

$$\kappa_G(v_i) = \frac{1}{3A}\left(2\pi - \sum_{t_j\, adj\, v_i} \theta_j\right)$$

Teorema Gauss-Bonnet

- L'integrale della curvatura gaussiana (su una superficie chiusa) è costante e dipende dalla caratteristica di eulero

$$\int_S \kappa_G = 2\pi\chi$$



## Euler characteristic

- Invariante topologico

$$\chi = V - E + F$$
$$\chi = |\Sigma_0| - |\Sigma_1| + |\Sigma_2| - \ldots$$

- Per tutto quello omeomorfo ad una sfera

$$\chi = 2$$

- In generale per una sup qualsiasi

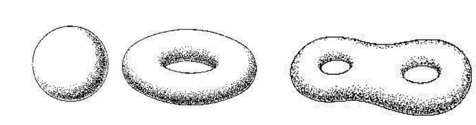
$$\chi = g - 2$$

- Con g genus della superficie



## genus

- Il genus di una superficie chiusa, orientabile 2manifold e`il massimo numero di tagli lungo curve chiuse semplici che si possono fare senza rendere l'insieme sconnesso



Per i profani numero di maniglie sulla superficie

# Smoothing

- Scopo filtrare via il rumore da una mesh
  - Come per image processing