
Geometric Mesh Processing

Paolo Cignoni

p.cignoni@isti.cnr.it

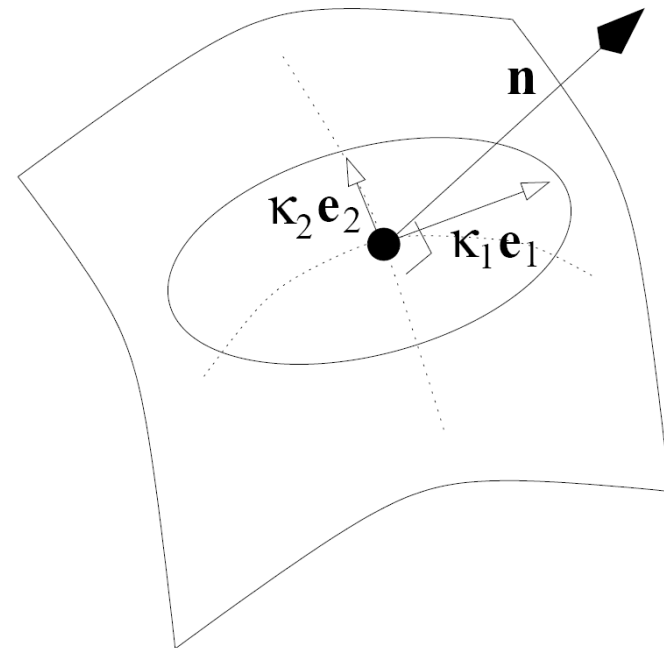
<http://vcg.isti.cnr.it/~cignoni>

Geometria Differenziale

- ❖ Consideriamo una superficie S 2-manifold embedded in R^3
 - ❖ Supponiamo di avere una parametrizzazione in due variabili che descriva $S(u, v) \rightarrow R^3$
 - ❖ Supponiamo che la sup sia continua e derivabile e che si possa avere per ogni punto il piano tangente ad S e perpendicolare alla normale n

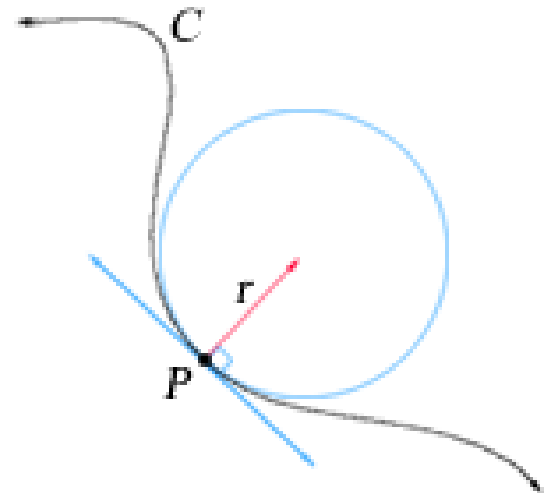
Curvatura di una superficie

- ❖ Per ogni direzione e_θ nel piano tangente
- ❖ Si può definire la curvatura $\kappa^N(\theta)$ come la curvatura della curva che appartiene all'intersezione tra il piano che contiene N e e_θ e la superficie stessa



Curvatura 2D

- ❖ Curvatura in un punto P è il reciproco del raggio di cerchio osculante (eg un cerchio che tocca la curva in P)
- ❖ Se si considera la curva come lo zero di una funzione f in $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (pensate alle curve di livello), la curvatura è la divergenza del gradiente di f



Curvatura nel piano

❖ La vera definizione è:

$x(t), y(t)$ una curva nel piano

ϕ tangential angle

s arc length

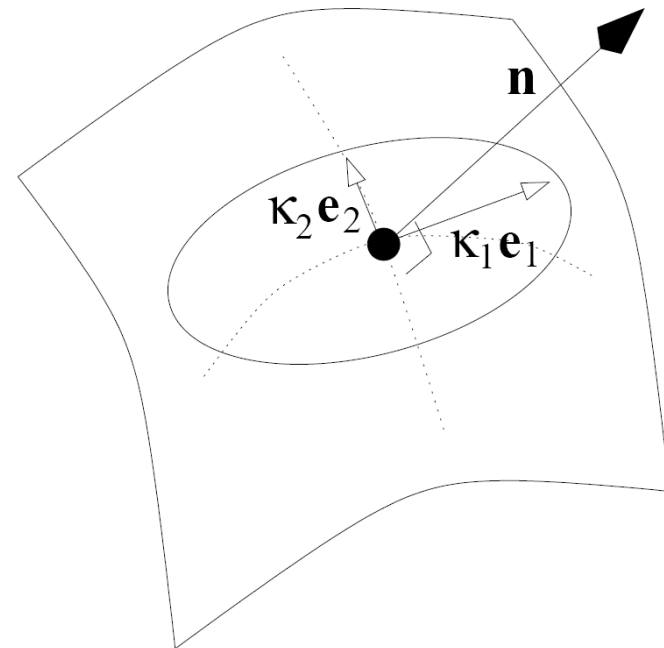
$$\kappa \equiv \frac{d\phi}{ds} = \frac{d\phi/dt}{ds/dt} = \frac{d\phi/dt}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}} = \frac{d\phi/dt}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

$$\kappa = \frac{x' y'' - y' x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

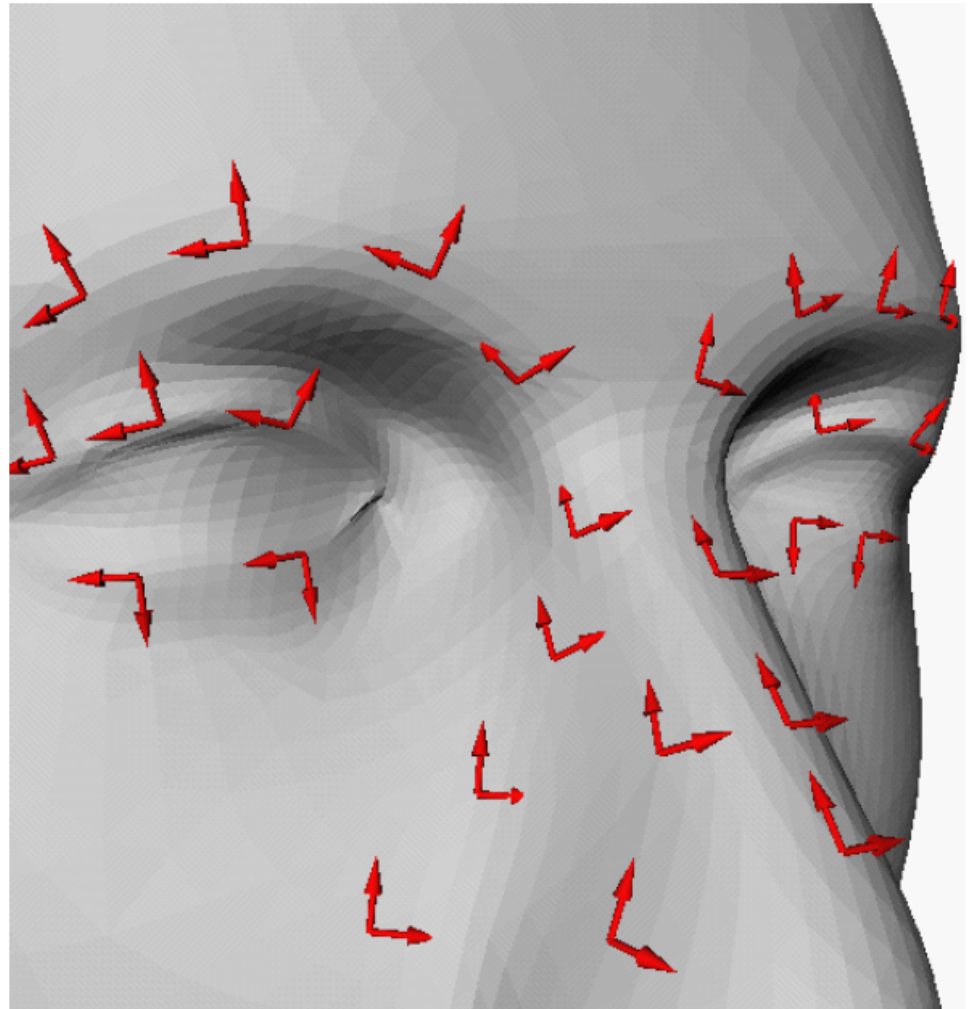
Curvatura Superficie

- ❖ Per ogni direzione ho una curvatura
- ❖ Considero le due direzioni lungo la quale la curvatura è max e min
- ❖ Si considerano positive se la direzione della curvatura nel piano concorda con la normale nel piano

κ_1, κ_2 *principal curvatures*
 e_1, e_2 *principal directions*



Curvature principali



Curvatura Gaussiana e Media

- ❖ Def come prodotto delle curvature principali
 - ❖ Positiva per sfere
 - ❖ Negativa per iperboloidi

$$\kappa_G \equiv K \equiv \kappa_1 \cdot \kappa_2 \quad \text{Gaussian curvature}$$

$$\bar{\kappa} \equiv H \equiv \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \quad \text{Curvatura media}$$

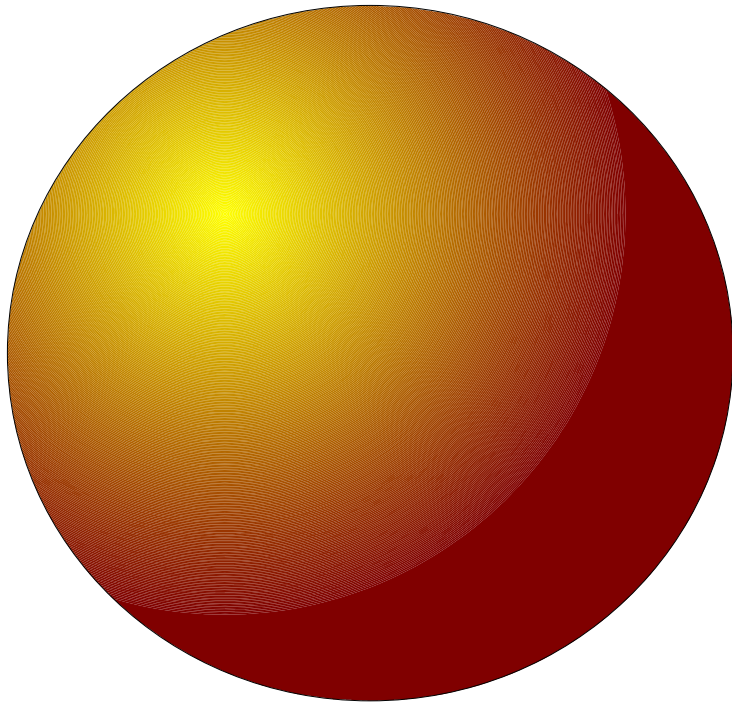
Intrinseco Estrinseco

- ❖ La curvatura gaussiana è una proprietà ***intrinseca*** della superficie anche se è definita in maniera ***estrinseca***
- ❖ La potrebbe determinare un abitante ***X*** bidimensionale della superficie stessa
- ❖ Se ***X*** descrive un cerchio di raggio r intorno ad un punto P della sup percorrendo una lunghezza $C(r)$ vale che:

$$K = \lim_{r \rightarrow 0} (2\pi r - C(r)) \cdot \frac{3}{\pi r^3}$$

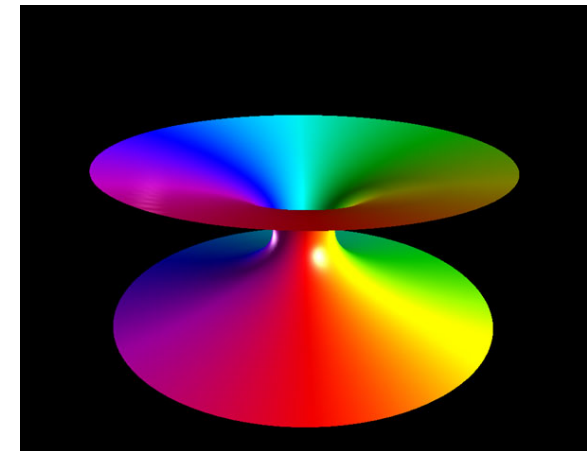
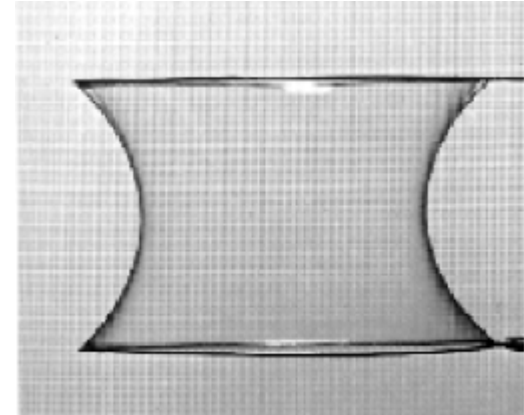
Curvatura Gaussiana

❖ Positiva e negativa



Curvatura Media

- ❖ Divergenza della normale alla superficie
 - ❖ divergence is an operator that measures a vector field's tendency to originate from or converge upon a given point
- ❖ Minimal surface and minimal area surfaces
 - ❖ Una superficie e' minima quando la sua curvatura media e' ovunque 0
 - ❖ Tutte le superfici di AREA minima area (subject to boundary constraints) hanno curvatura media = 0 (Non vale il contrario!)
- ❖ The surface tension of an interface, like a soap bubble, is proportional to its mean curvature



Curvatura Media

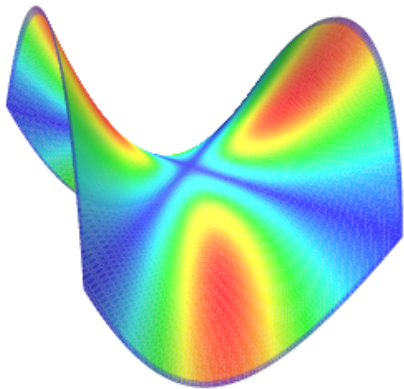
- ❖ Divergenza della normale alla superficie
- ❖ Se si considera un'area A intorno ad un punto

$$2\bar{\kappa} n = \lim_{diam(A) \rightarrow 0} \frac{\nabla A}{A}$$

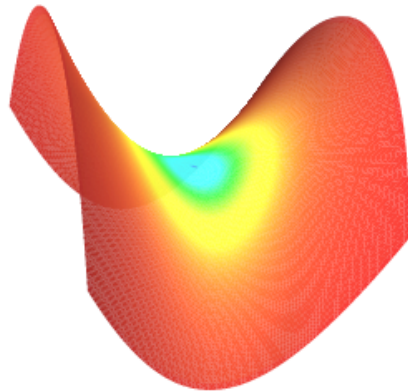
- ❖ Dove ∇ è la derivata rispetto a xyz (e non alla parametrizzazione locale della superficie, in altre parole estrinseca e non intrinseca)
 - ❖ e.g. su un cilindro la curvatura media $\neq 0$

❖ Red > 0 Blue < 0 , non nella stessa scala

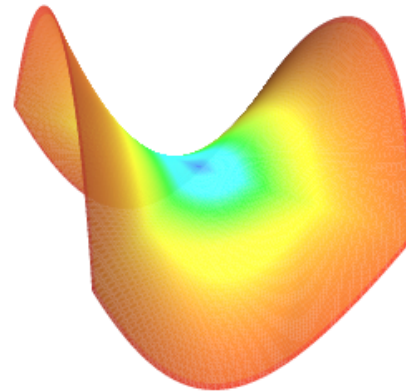
mean



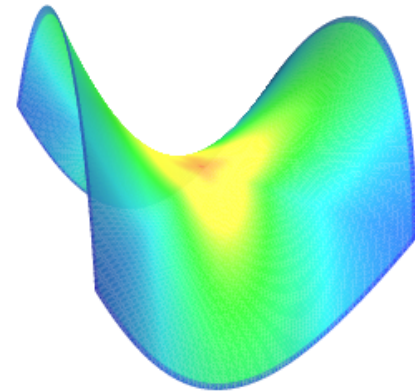
gaussian



min



max

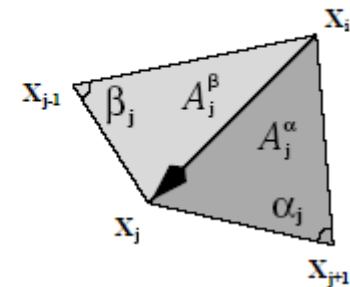
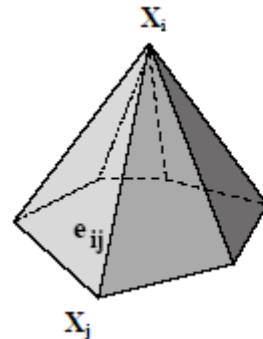


Curvatura media discreta

$$-\bar{\kappa} \mathbf{n} = \frac{1}{4A} \sum_{j \in N_1(i)} (\cot \alpha_j + \cot \beta_j)(x_j - x_i)$$

where α_j and β_j are the two angles opposite to the edge in the two triangles having the edge e_{ij} in common

A is the sum of the areas of the triangles



Curvatura Gaussiana discreta

- ❖ Ricordando che l'integrale della curvatura gaussiana di una sup chiusa e'

4π

$$\kappa_G(v_i) = \frac{1}{3A} (2\pi - \sum_{t_j \text{adj } v_i} \theta_j)$$

Teorema Gauss-Bonnet

- ❖ L'integrale della curvatura gaussiana (su una superficie chiusa) è costante e dipende dalla caratteristica di eulero

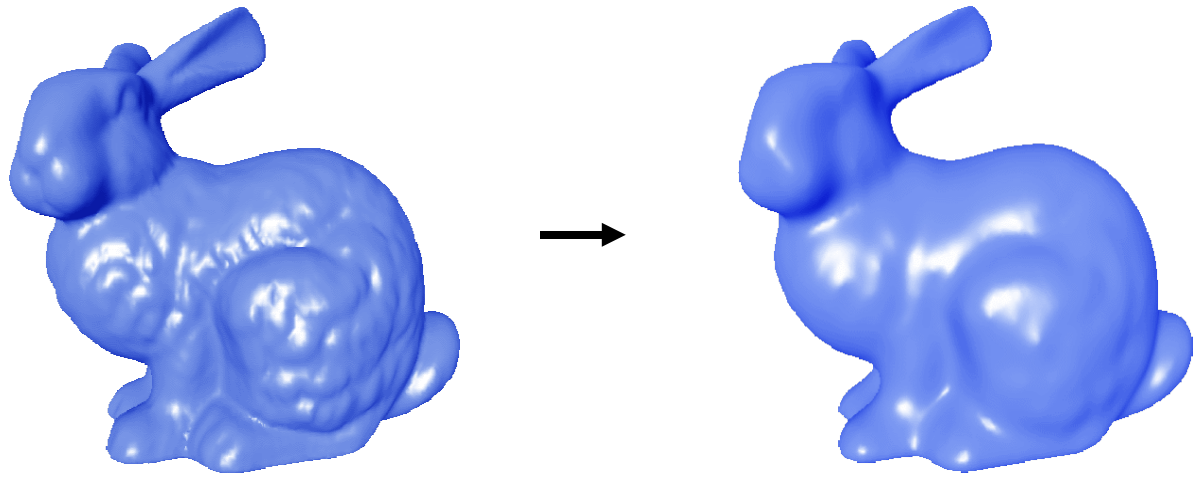
$$\int_S \kappa_G = 2\pi \chi$$

Smoothing

- ❖ Scopo filtrare via il rumore da una mesh
 - ❖ Come per image processing

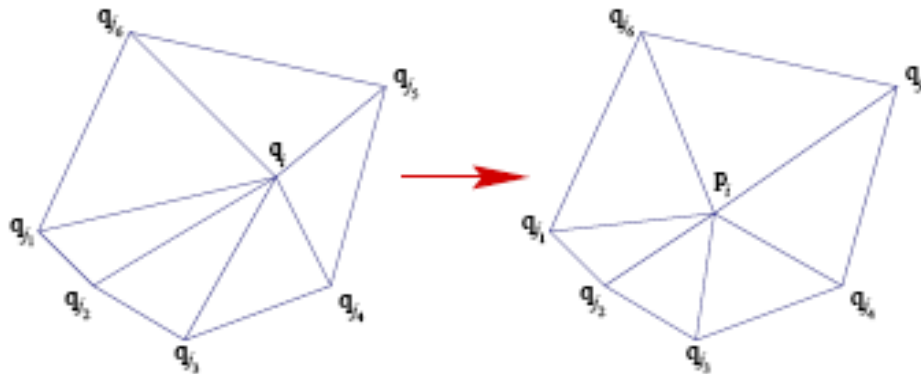


Esempio



Discrete Laplacian Smoothing

- ❖ In pratica nella sua accezione piu' semplice il Laplacian smoothing (detto anche Gaussian Smoothing) significa:
 - ❖ For each vertex, compute the displacement vector towards the average of its neighbors. Then move each vertex by a fraction of its displacement vector.



Laplacian Smoothing

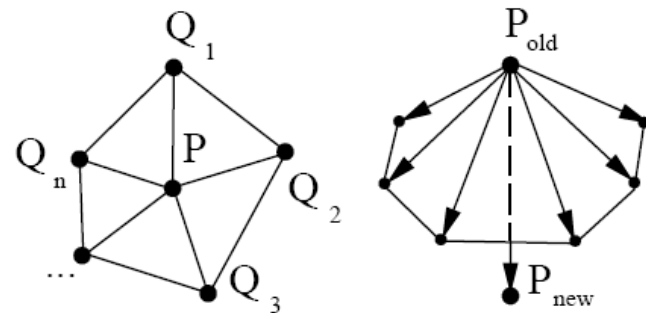
❖ In pratica:

$$P_{\text{new}} \leftarrow P_{\text{old}} + \lambda U(P_{\text{old}})$$

- ❖ Dove come U (detto umbrella operator) si puo' scegliere

$$U(P) = \frac{1}{\sum_i w_i} \sum_i w_i Q_i - P$$

$$U_0(P) = \frac{1}{n} \sum_i Q_i - P,$$

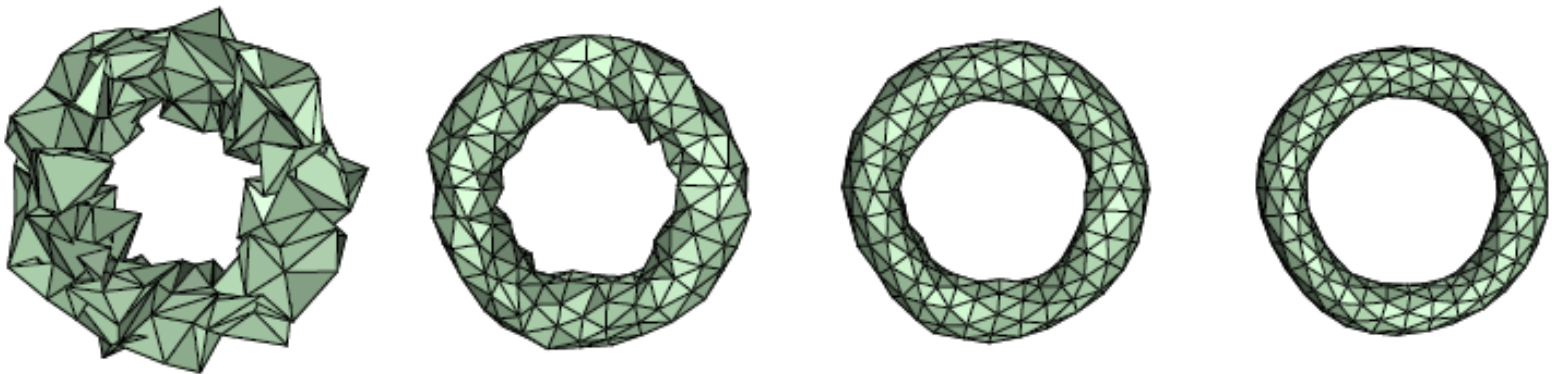


Laplacian Smoothing Implementation

- ❖ Qual'è la struttura dati minimale per implementare il LS?
 - ❖ Se la mesh è chiusa basta la relazione FV e un paio di variabili temporanee per ogni vertice
 - ❖ Si itera sulle facce (e non sui vertici) accumulando le somme parziali per ogni vertice...

Laplacian smoothing issues

- ❖ Tante!
- ❖ Il primo problema e' lo SHRINKING



Taubin smoothing

❖ Per ogni iterazione si fanno due passi

❖ Si definiscono 2 costanti $\lambda > 0$ $\mu < 0$

- ❖ compute the laplacian displacement for each vertex and moves the vertices by λ times this displacement.
- ❖ Then compute again the laplacian and moves back each vertex by μ times the displacement.

$$\begin{aligned} P_{\text{new}} &\leftarrow (1 - \mu\mathcal{U})(1 + \lambda\mathcal{U})P_{\text{old}} = \\ &= P_{\text{old}} - (\mu - \lambda)\mathcal{U}(P_{\text{old}}) - \mu\lambda\mathcal{U}^2(P_{\text{old}}), \end{aligned}$$

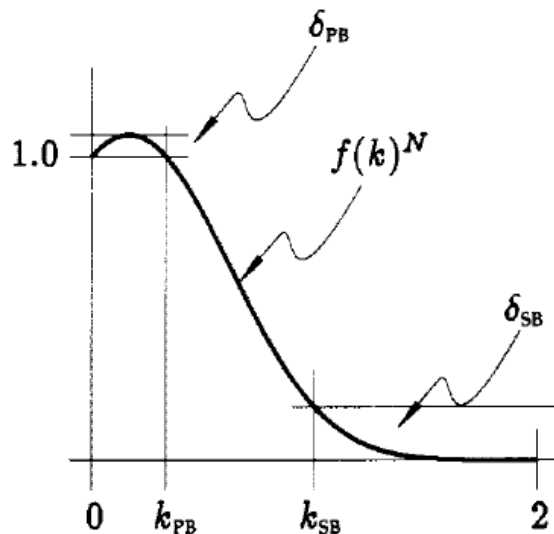
$$\mathcal{U}^2(P) = \frac{1}{\sum_i w_i} \sum_i w_i \mathcal{U}(Q_i) - \mathcal{U}(P).$$

❖ $\lambda > 0$ $\mu > 0$ Parametri *mistici*.

- ❖ Si possono definire constrain sui loro valori in modo tale da definire le proprieta' del filtro risultante (pass band frequency)

Taubin Smoothing

- ❖ In termini di spazio delle frequenze si puo' studiare l'effetto del TS in funzione dei parametri e del numero di volte che si applica



$$0 < N, 0 < \lambda < -\mu, \lambda < \frac{1}{k_{SB}}, \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = k_{PB}.$$

$$\begin{aligned} ((\lambda - \mu)^2)/(-4\lambda\mu))^N &< 1 + \delta_{PB} \\ ((1 - \lambda k_{SB})(1 - \mu k_{SB}))^N &< \delta_{SB}. \end{aligned}$$

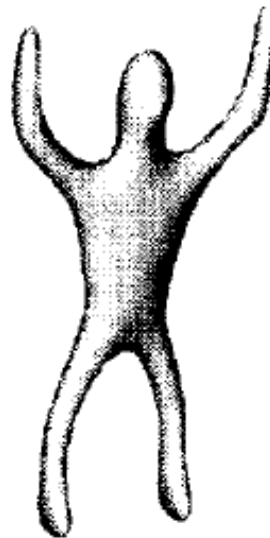
Figure 8: Graph of the transfer function $f(k)^N$.

Taubin smoothing in pratica

❖ B Laplacian Smoothing, C Taubin



A

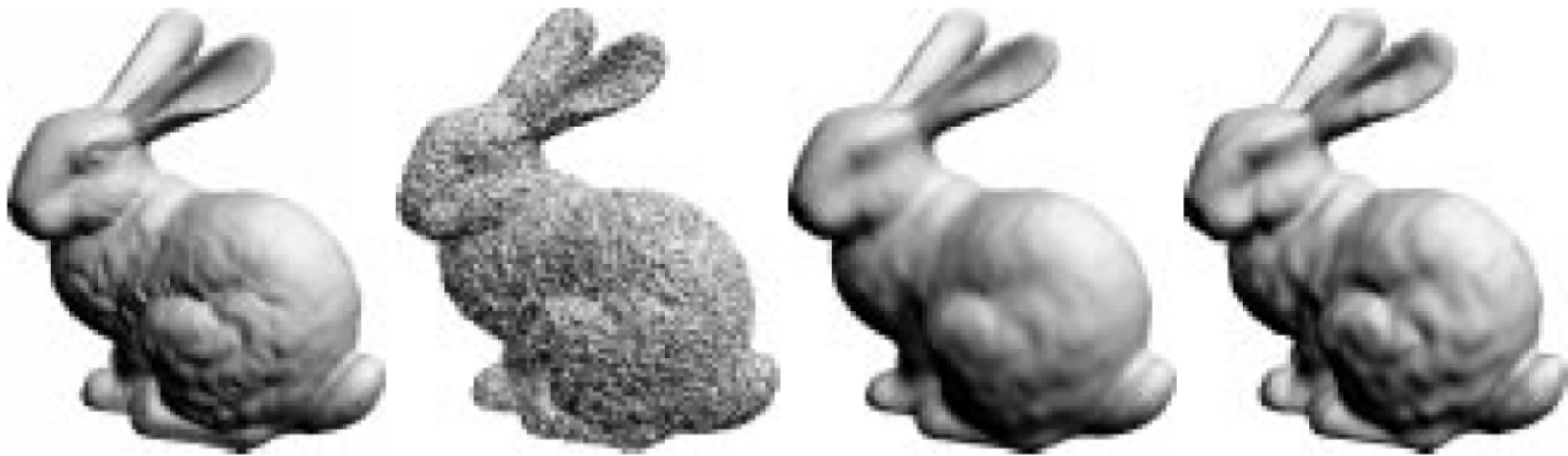


B



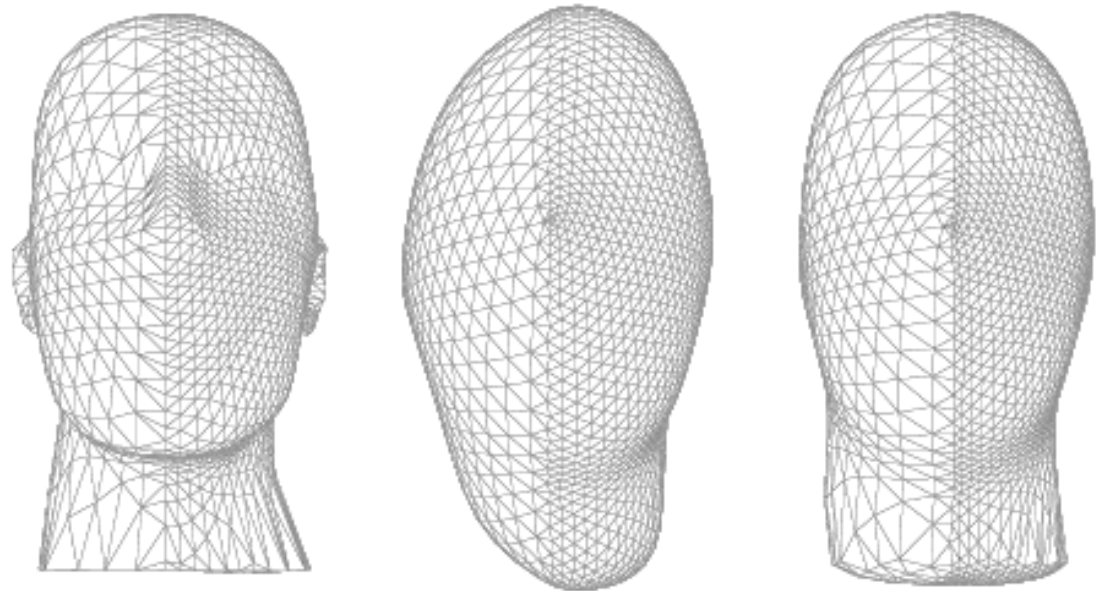
C

Taubin smooting in pratica

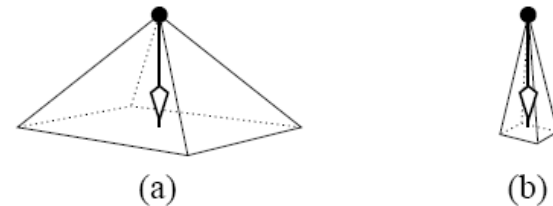


Issues

❖ Dipendenza dalla tassellazione della mesh



- ❖ a e b vengono spostati della stessa quantità
- ❖ La parte a sx converge più rapidamente!



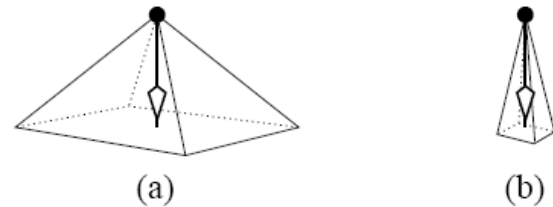
Scale Dependent Laplacian

- ❖ Si puo' sostituire l'operatore standard

$$L(x_i) = \frac{1}{m} \sum_{j \in N_1(i)} x_j - x_i$$

Con uno che tenga in considerazione la lunghezza degli edge coinvolti

$$L(x_i) = \frac{2}{E} \sum_{j \in N_1(i)} \frac{x_j - x_i}{|e_{ij}|}, \quad \text{with } E = \sum_{j \in N_1(i)} |e_{ij}|.$$



Smoothing: interpretazione nel continuo

- ❖ Problema di minimizzazione dell'energia di una membrana
 - ❖ Al solito si ritorna al problema delle sup di area minima
 - ❖ Gradiente dell'energia e' il laplaciano
 - ❖ the Laplacian is the sum of all the unmixed second partial derivatives
 - ❖ Si sposta i vertici nella direzione che minimizza l'energia

- ❖ Laplaciano

$$L(M) = \frac{\partial^2 M}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial v^2}$$

- ❖ Versione discreta del laplaciano (Umbrella operator)

$$L_P(M) = \frac{1}{n} \sum_j (Q_j - P)$$

Smoothing: interpretazione nel continuo

- ❖ Si sposta i vertici nella direzione che minimizza l'energia
- ❖ Laplaciano e sua versione discreta

$$L(M) = \frac{\partial^2 M}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial v^2} \quad L_P(M) = \frac{1}{n} \sum_j (Q_j - P)$$

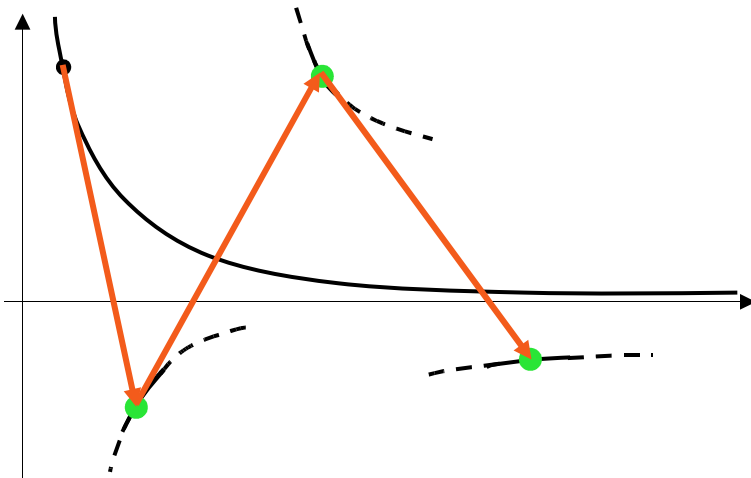
- ❖ Forma differenziale $\dot{M} = \lambda L(M)$
- ❖ Si puo affrontare tramite integrazione diretta eulero

$$M_{t+dt} = M_t + \lambda L(M_t) dt \quad M_{n+1} = (I + \lambda dt L) M_n$$

- ❖ Al solito, problema di stabilita' nella scelta di dt.
- ❖ Lo scale dependent Laplacian funziona MA richiede un dt dell'ordine del piu' piccolo edge...



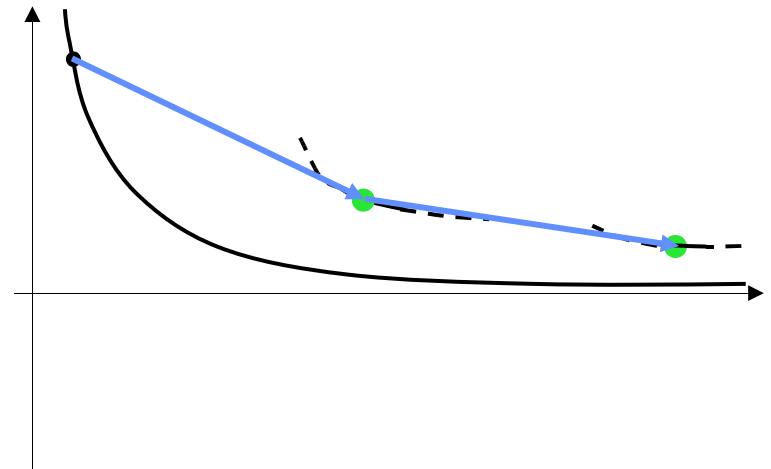
Explicit euler scheme vs implicit euler scheme



$$y(t+dt) = y(t) + \dot{y}(t) dt$$

$$M_{t+dt} = M_t + \lambda L(M_t) dt$$

$$M_{n+1} = (I + \lambda dt L) M_n$$



$$y(t+dt) = y(t) + \dot{y}(t+dt) dt$$

$$M_{t+dt} = M_t + \lambda L(M_{t+dt}) dt$$

$$M_{n+1} = M_n + \lambda dt L(M_{n+1})$$

$$(I - \lambda dt L) M_{n+1} = M_n$$

Implicit Fairing

$$(I - \lambda dt L) M_{n+1} = M_n$$

- ❖ Significa dover risolvere un sistema lineare sparso

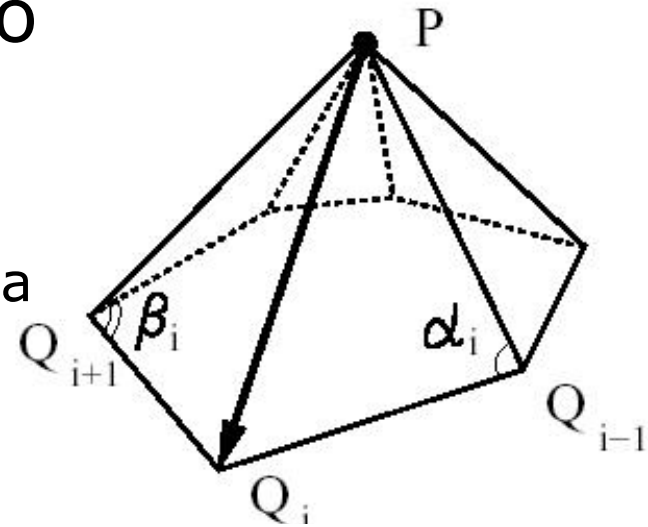
$$A = I - \lambda dt L$$

- ❖ **M** sono vertex coord
- ❖ **A** ha in media sei elementi != 0 per riga...
- ❖ Preconditioned Biconjugate gradient methods

Mean Curvature Flow

❖ Altra idea: considerare in modo diverso le zone a differente curvatura

❖ Si usa la curvatura media nella forma differenziale



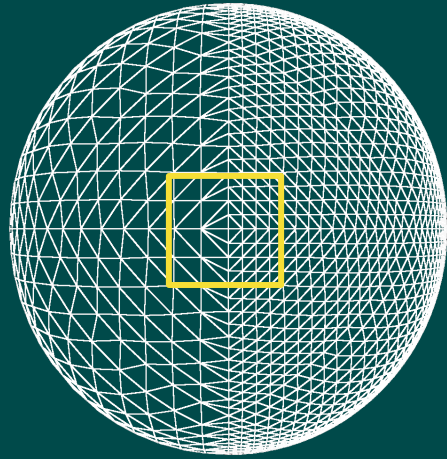
$$\mathbf{P}_{new} = \mathbf{P}_{old} + \lambda \mathbf{Hn}(\mathbf{P}_{old}) \quad (6)$$

where

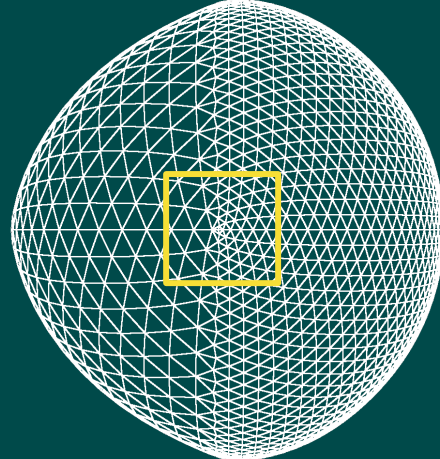
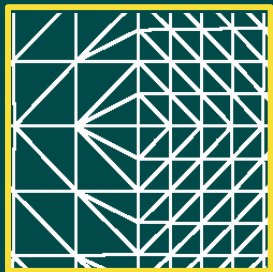
$$\mathbf{Hn}(\mathbf{P}) = \frac{1}{4A} \sum_i (\cot a_i + \cot b_i) (\mathbf{Q}_i - \mathbf{P})$$

$\mathbf{Hn}(\mathbf{P})$ is the mean curvature vector, A is the sum of the areas of the star triangles of the vertex \mathbf{P} , \mathbf{Q}_i are the star vertices of \mathbf{P} and a_i , b_i are as described in [1].

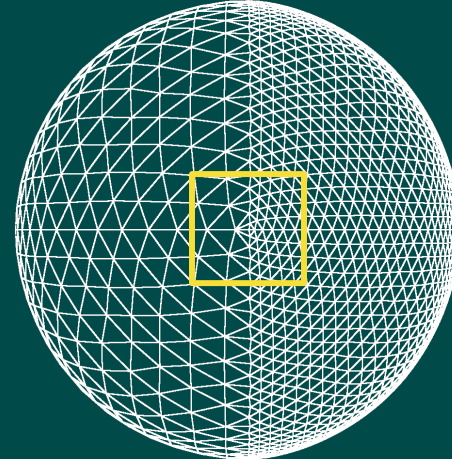
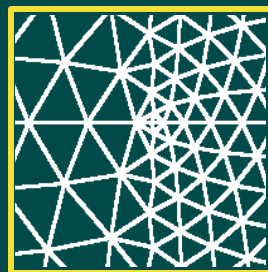
Curvature Flow Evaluation



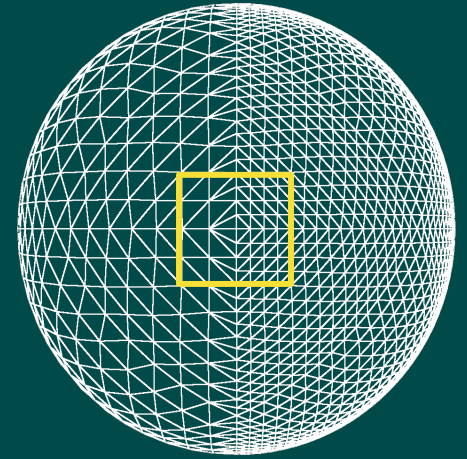
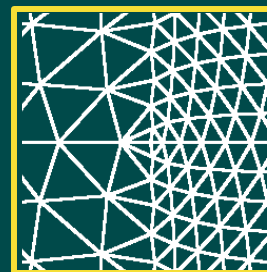
Initial
Mesh



Regular
Diffusion



Improved
Diffusion



Curvature
Flow

