

Corso di Grafica Computazionale

Rappresentazione di Oggetti Tridimensionali

***Docente:
Massimiliano Corsini***

Laurea Specialistica in Ing. Informatica

Facoltà di Ingegneria

Università degli Studi di Siena



Overview

- Rappresentazione Oggetti 3D
 - Rappresentazione Poligonale (meshes)
 - Rappresentazione Implicita
 - Rappresentazione Parametrica
 - Polinomi di Bernstein
 - Curve e Superfici di Bèzier
 - Curve e Superfici B-Spline
 - NURBS
 - Voxels (cenni)
 - Constructive Solid Geometry (CSG) (cenni)
 - Superfici di Suddivisione
 - Approfondimenti sulle mesh poligonali

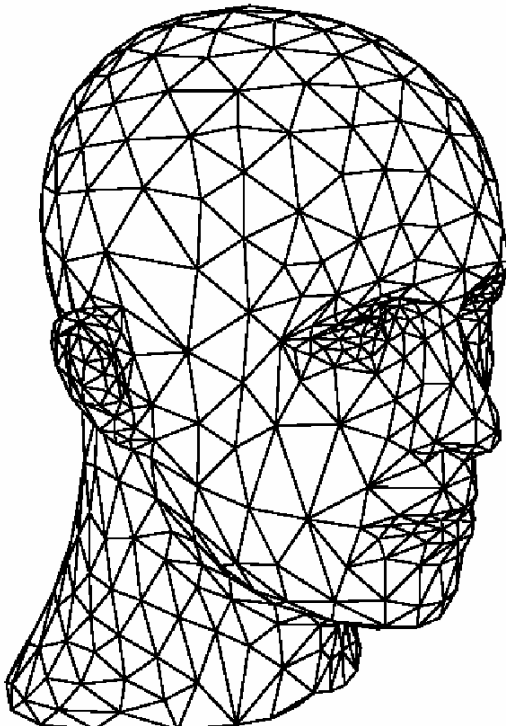


Modellazione Geometrica

- La rappresentazione di modelli 3D si può suddividere in due categorie:
 - Boundary-based: è la superficie dell'oggetto 3D ad essere rappresentata (*boundary representation* or *b-rep*)
 - Esempi: mesh poligonali, rapp. Implicite e parametriche
 - Volume-based: è il volume ad essere rappresentato
 - Esempi: voxels, CSG.
- Modellazione Geometrica può essere:
 - Automatica (a partire da immagini → Computer Vision)
 - Manuale (Maya[©], Rhino3D[©], 3DStudio Max[©])
 - Procedurale (frattali, grammatiche)
- Una volta che la geometria di un oggetto è rappresentata questa può essere *renderizzata* per produrre l'immagine finale.

Rappresentazione Poligonale (Mesh)

La superficie dell'oggetto 3D è rappresentata da un insieme di poligoni nello spazio.

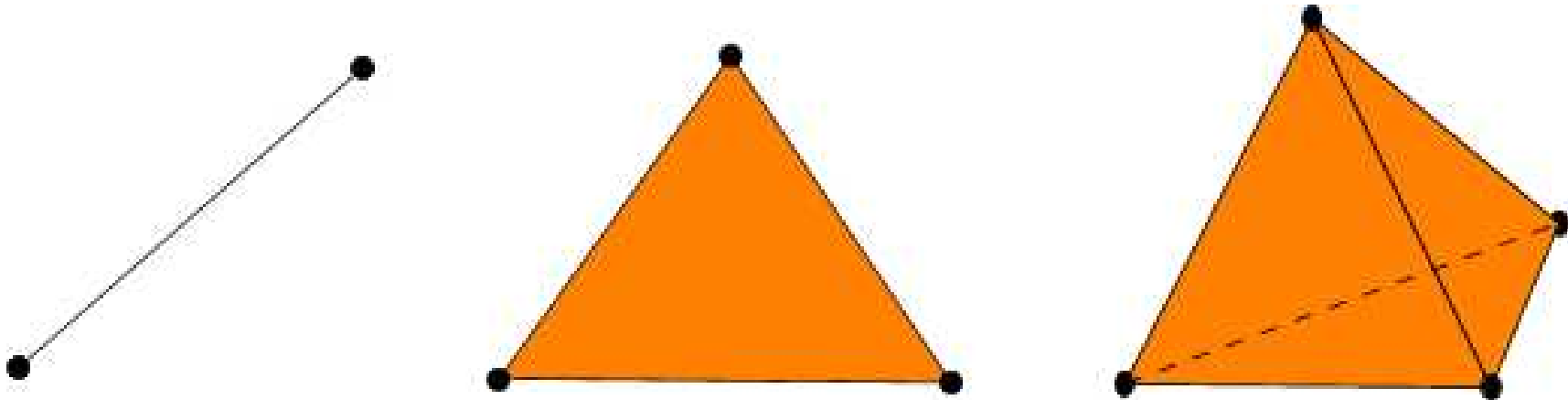


Mesh Poligonale

Intuitivamente, una mesh è un insieme di vertici, lati e facce.

Matematicamente, una mesh è una tupla (K, V) dove V è l'insieme dei punti nello spazio (vertici), e K , insieme dei *complessi simpliciali*, in pratica contiene le informazioni sulla connettività (topologia) tra i punti contenuti in V (ossia lati e facce).

- Un *simplexso* di ordine k è la combinazione convessa dei $k+1$ punti che lo compongono
 - Simplexso di ordine 1 \rightarrow segmento
 - Simplexso di ordine 2 \rightarrow triangolo
 - Simplexso di ordine 3 \rightarrow tetraedro
- L'insieme dei simplexsi (che rispettano certe proprietà) forma il complesso simpliciale K visto precedentemente.





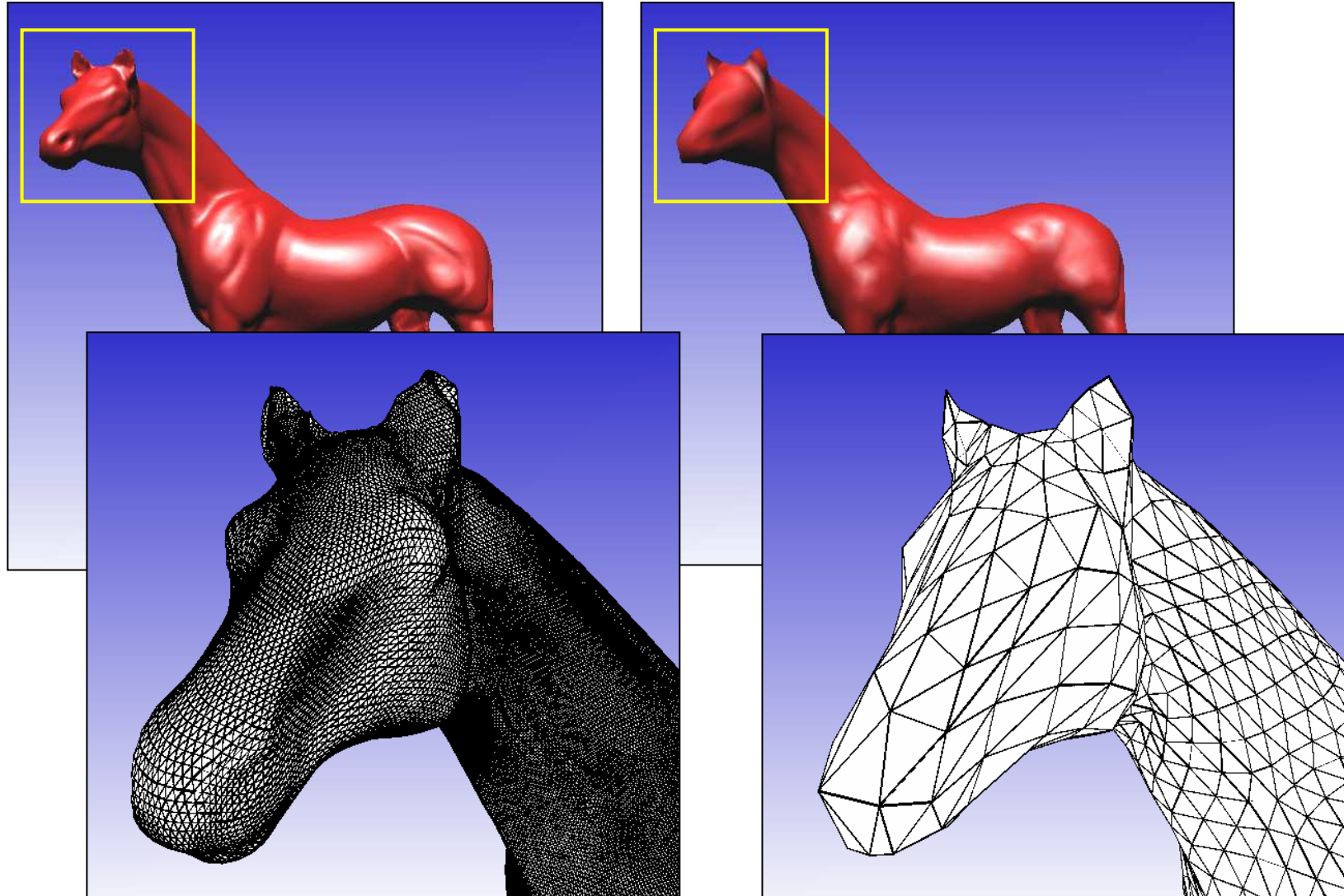
Meshes

- Le mesh poligonali sono un'approssimazione discreta di una superficie.
- Può essere vista come il minimo comune denominatore di tutte le altre rappresentazioni.
- Tipicamente vengono utilizzate particolari tipi di mesh:
 - *Mesh triangolari*: ossia mesh le cui facce sono triangoli (moderne schede grafiche).
 - *Mesh quadrangolari*: ossia mesh le cui facce sono quadrilateri (es: Geographic Information System (GIS)).



Esempi di Meshes

Facoltà di
Ingegneria





Equazione di Eulero

Equazione di Eulero

$$\#V - \#E + \#F = 2 - G$$

#V = numero di vertici

#E = numero di lati

#F = numero di facce

G = genus (sfera ha $G = 0$, toro ha $G = 1$)



Questa relazione è valida solamente per mesh poligonali *chiuse*.



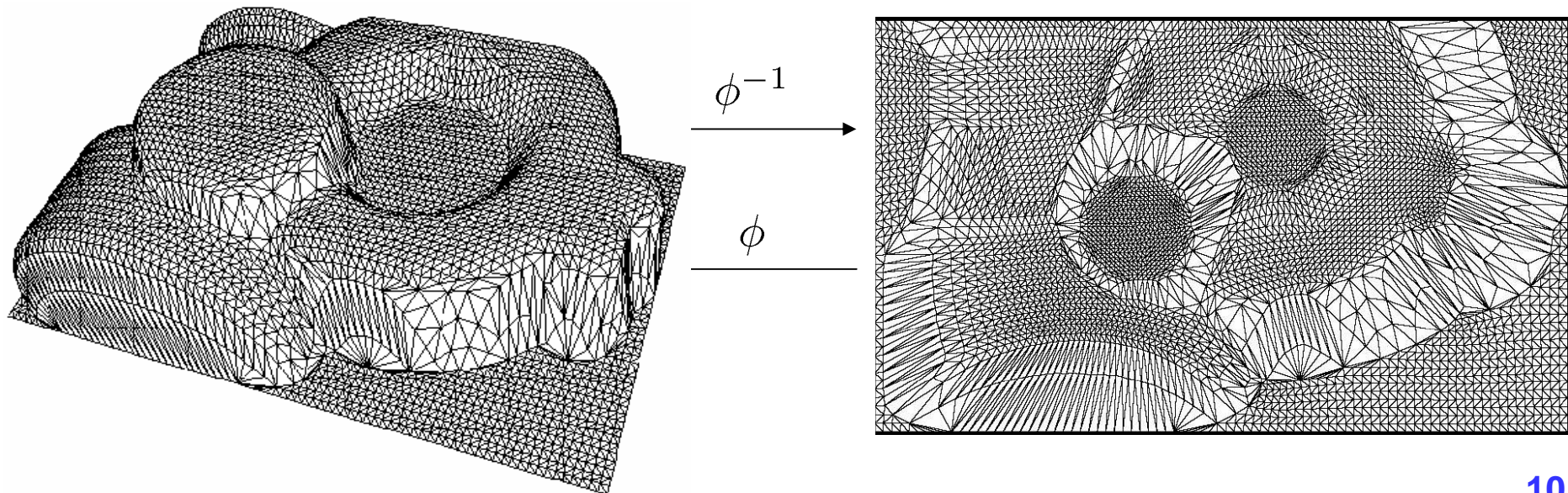
Limitazioni delle Meshes

- Facce Planari
- Non sono una rappresentazione compatta – i.e. modelli con elevatissimo dettaglio richiedono grandi quantità di dati
- Editing diretto è “difficile”
- L’elaborazione con algoritmi geometrici è intrinsecamente onerosa
- Non hanno una parametrizzazione naturale, la parametrizzazione di mesh è un settore ancora attivo di ricerca

La parametrizzazione di una mesh consiste nel trovare una funzione capace di mappare i vertici della mesh in un dominio planare.

$$\phi : T \subset R^2 \mapsto S$$

La parametrizzazione introduce inevitabilmente distorsioni. Le tecniche odierne cercano di preservare una o più proprietà della superficie come angoli o aree.





Rappresentazione Implicita

La superficie viene definita in termine delle
sue coordinate cartesiane:

$$f(x, y, z) = 0$$

- Esempi :
 - Sfera di raggio r : $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$
 - Piano generico : $ax + by + cz + d = 0$
- Rappresentazione estremamente compatta (!!)
- Pochi utilizzi (design meccanico)



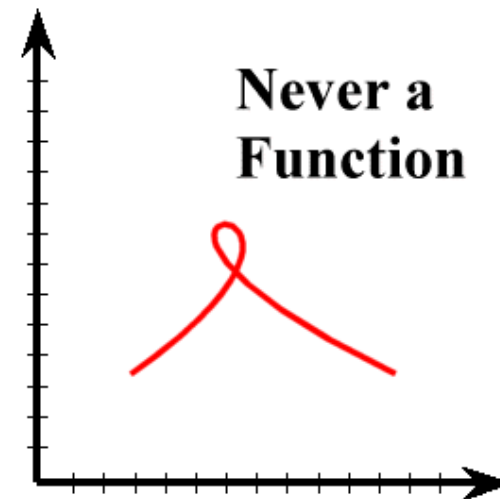
Rappresentazione Parametrica

La superficie viene definita in forma parametrica utilizzando tre funzioni bi-variate:

$$S(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))$$

dove u e v variano tra 0 ed 1

- Le curve parametriche sono molto flessibili
- Non sono vincolate ad essere funzioni

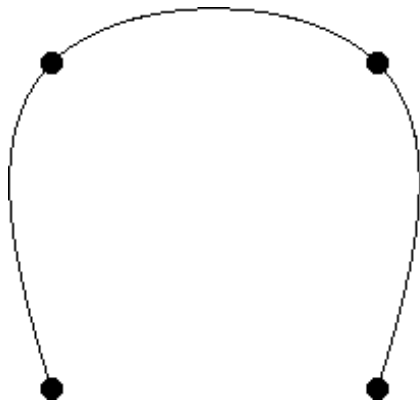




Curve Parametriche

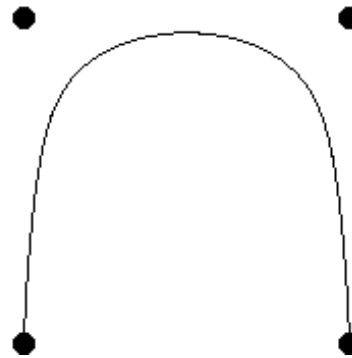
$$P(t) = \sum_{i=0}^n B_i(t) P_i$$

Funzione di
Blending



Interpolation

La curva deve necessariamente passare sui punti di controllo



Approssimazione

La forma della curva è influenzata dai punti di controllo



Polinomio di Bernstein di grado n

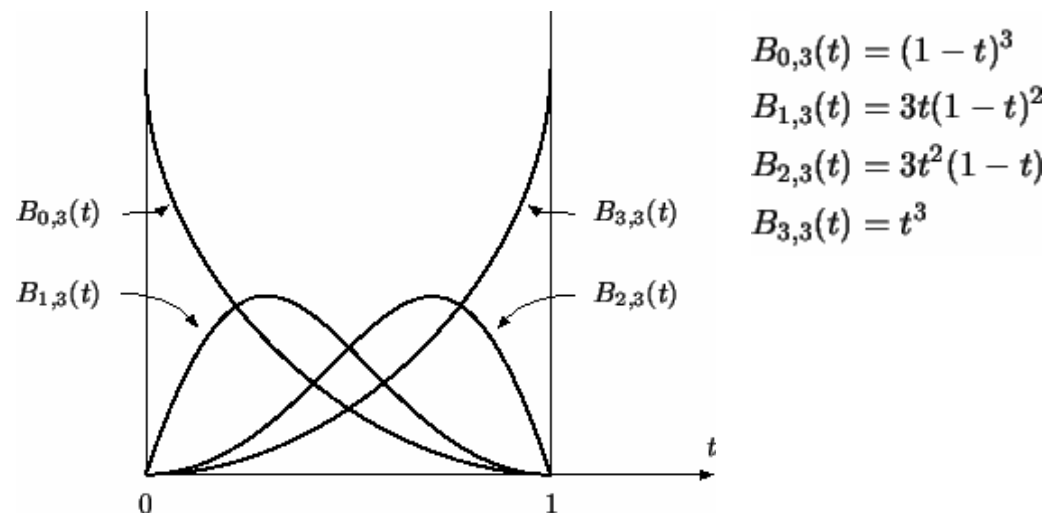
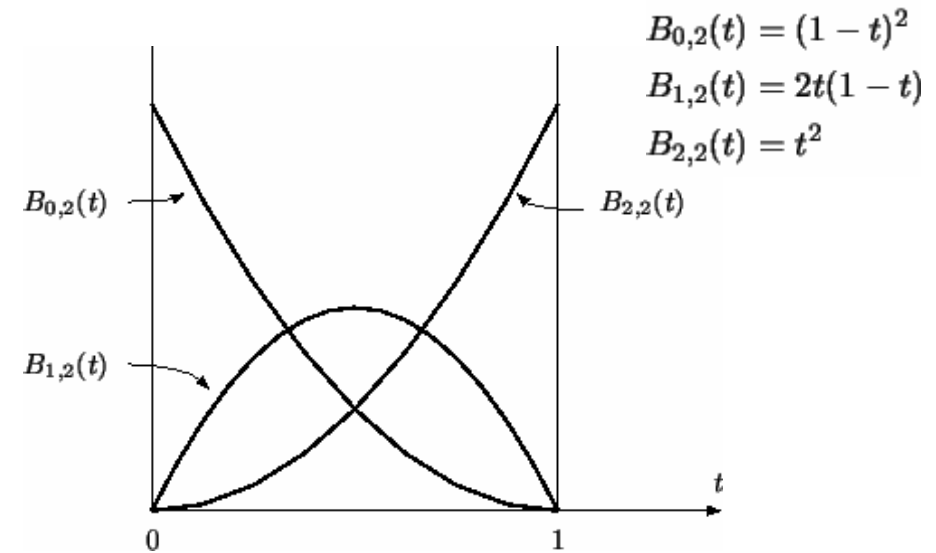
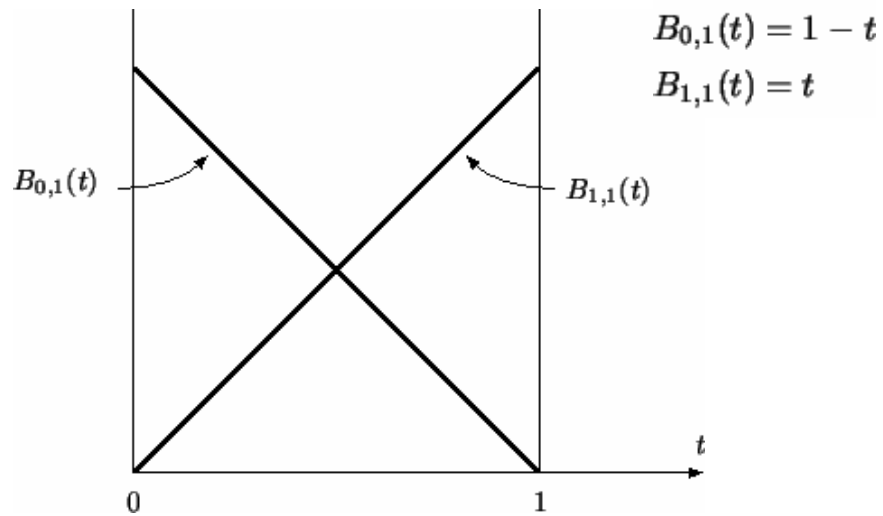
$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \quad i = 0 \text{K} n$$

- Polinomi sono “semplici” :-)
- Polinomi formano uno spazio vettoriale, $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ è la base di questo spazio
- $\{B_{0,n}, B_{1,n}, \dots, B_{n,n}\}$ è chiamata *base di Bernstein*
- $B_{i,n-1}$ è combinazione lineare di $B_{i,n}$
- Partizione dell'unità (“la loro somma dà uno”)

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

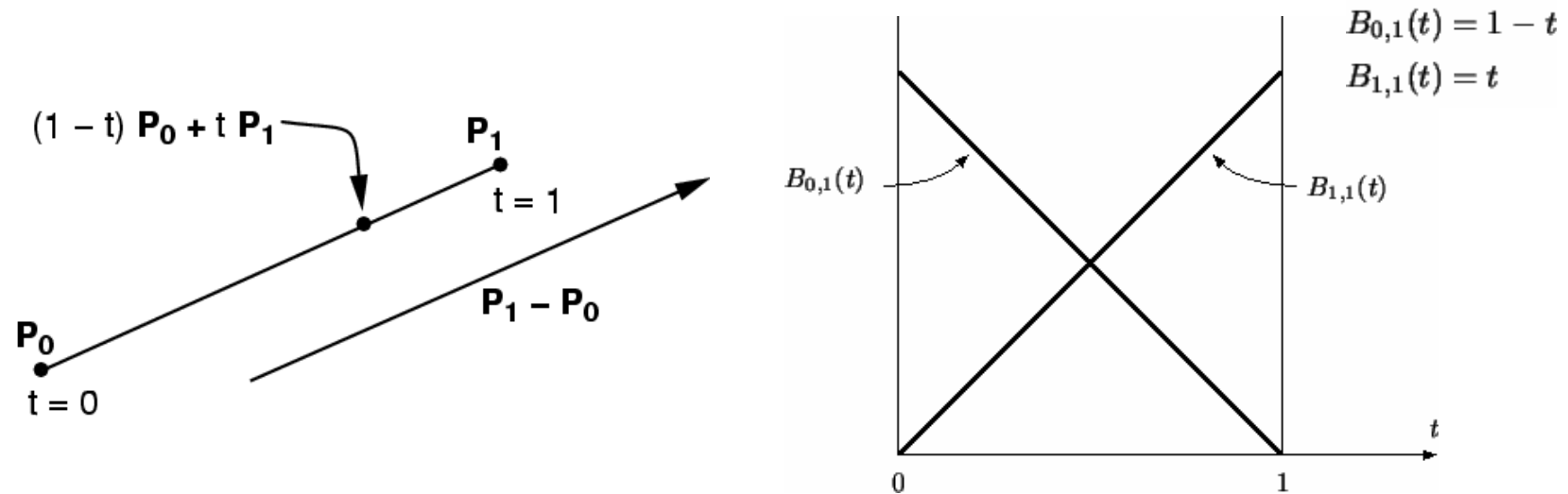


Polinomi di Bernstein





Interpolazione Lineare



$$P(t) = (1-t)P_0 + tP_1 = \begin{bmatrix} (1-t) & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \end{bmatrix}$$

$$B_1(t) = \begin{bmatrix} B_{0,1}(t) & B_{1,1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-t) & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$



Rappresentazione Matriciale dei Polinomi di Bernstein

$$\begin{bmatrix} B_{0,n}(t) & B_{1,n}(t) & B_{2,n}(t) & \dots & B_{n,n}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & \dots & t^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{0,0} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{1,0} & b_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ b_{2,0} & b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,0} & b_{n,1} & b_{n,2} & \dots & b_{n,n} \end{bmatrix}$$

Caso quadratico (n=2)

$$B_2(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Caso cubico (n=3)

$$B_3(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$



Curve di Bézier

Curve di Bezier di grado n

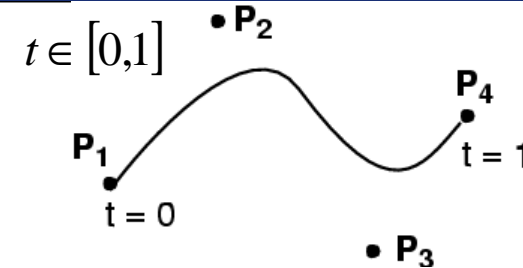
$$P(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(t)$$

$B_{i,n}(t)$ sono polinomi di Bernstein di grado n definiti per $0 \leq t \leq 1$



Curva cubica di Bézier

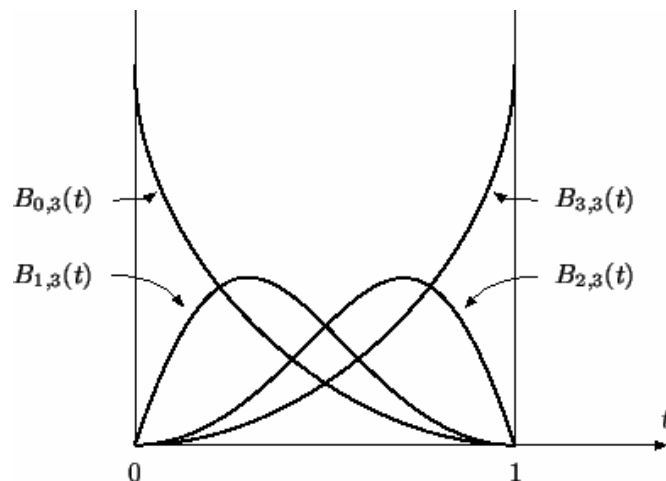
Definizione analitica: $P(t) = \sum_{i=0}^3 P_i B_{i,3}(t)$



Notazione
Matriciale:

$$P(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t) P_2 + t^3 P_3 =$$

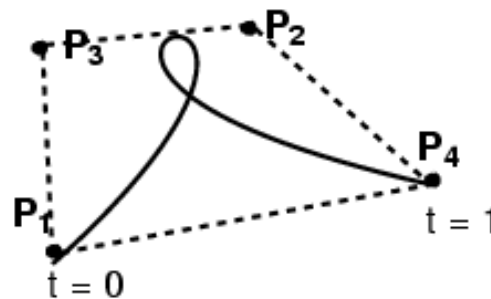
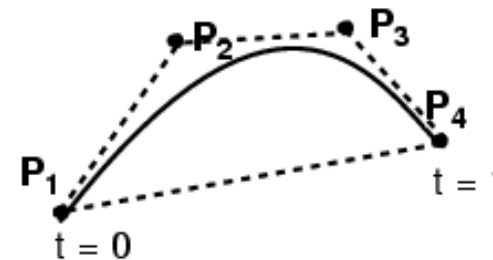
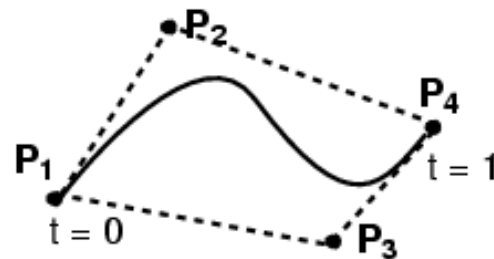
$$= \begin{bmatrix} (1-t)^3 & t(1-t)^2 & t^2(1-t) & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$





Curva cubica di Bézier

- 4 punti di controllo
- La curva passa tra il primo e l'ultimo punto di controllo
- La curva è tangente in P_1 a $(P_1 - P_2)$ ed in P_4 a $(P_4 - P_3)$





Bezier Patch di grado n

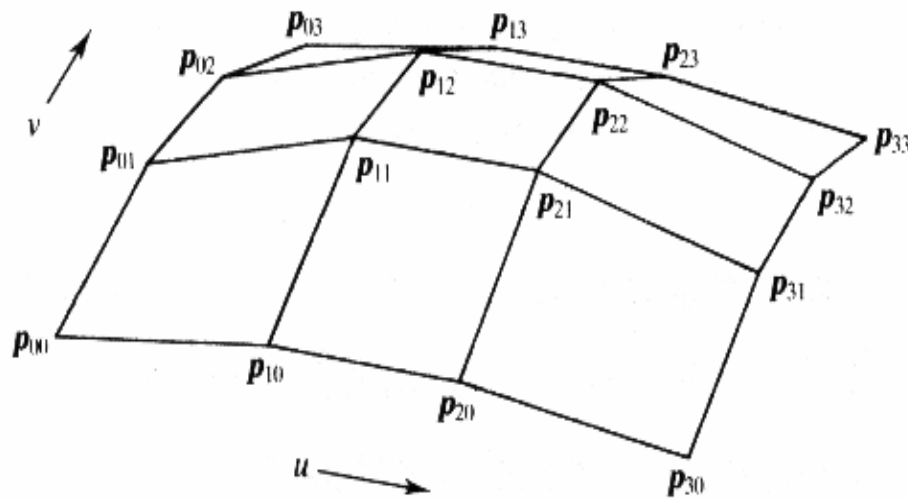
$$P(u, v) = \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^n P_{i,j} B_{i,n}(u) B_{j,m}(v)$$

$P_{i,j}$: patch di controllo

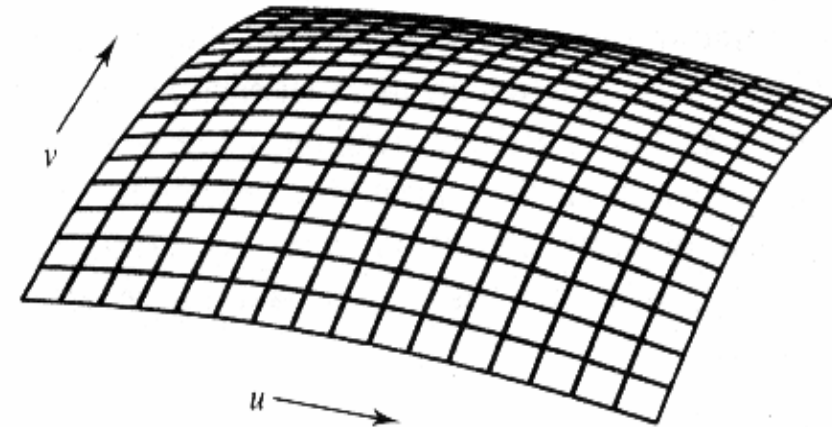
$B_{i,n}(u)$: Polinomio di Bernstein di grado n definito per $0 \leq u \leq 1$

$B_{j,m}(v)$: Polinomio di Bernstein di grado m definito per $0 \leq v \leq 1$

- Poliedro di controllo formato da 16 punti e il risultante patch bi-cubico:



(a)



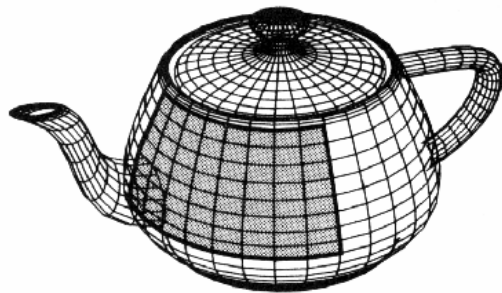
(b)



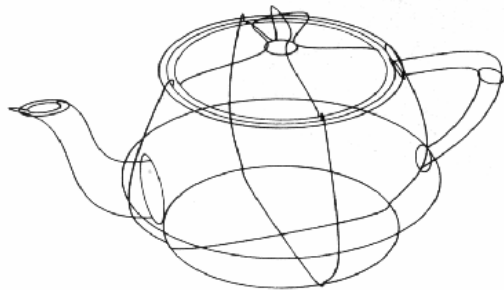
Esempio di Modellazione con Bézier Patches

Facoltà di
Ingegneria

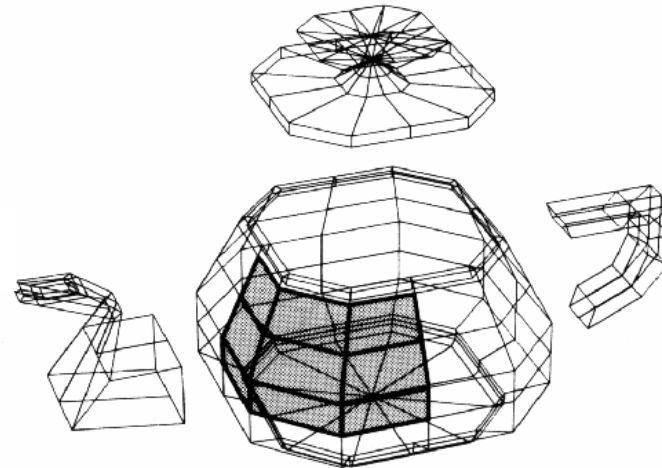
Utah teapot , 32 patches



Singolo patch evidenziato



lati dei patches



wireframe dei punti di controllo



B-Spline di grado n

$$P(t) = \sum_{i=0}^n P_i N_{i,k}(t)$$

Funzione
di Blending
 $N_{i,k}(t)$

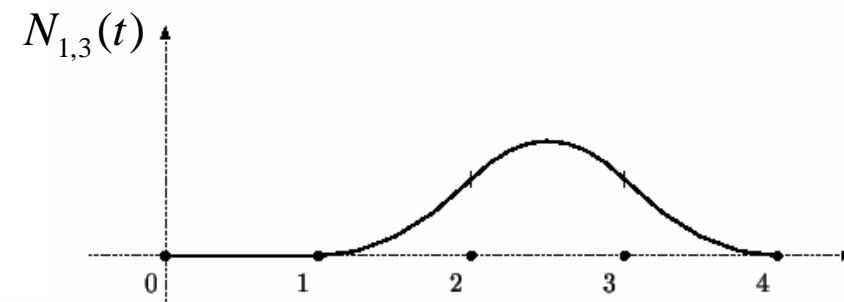
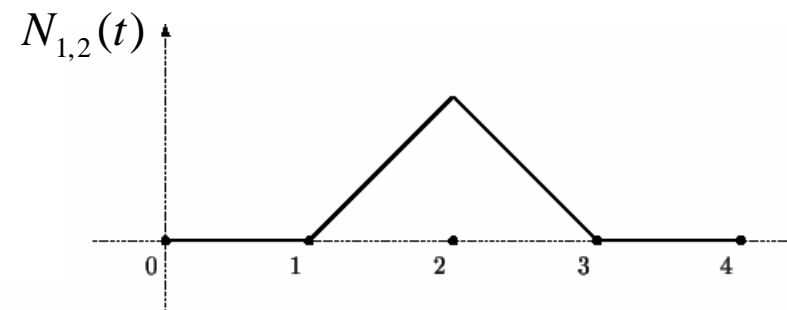
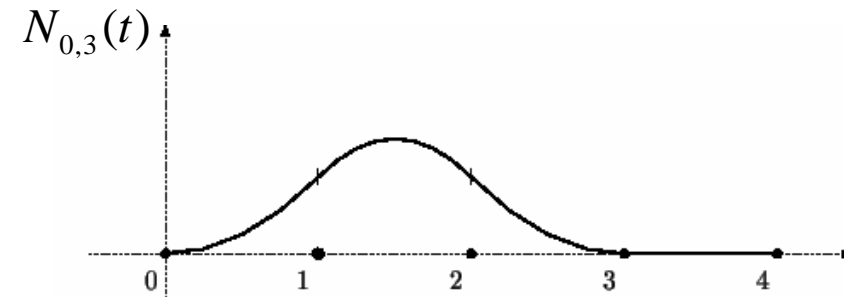
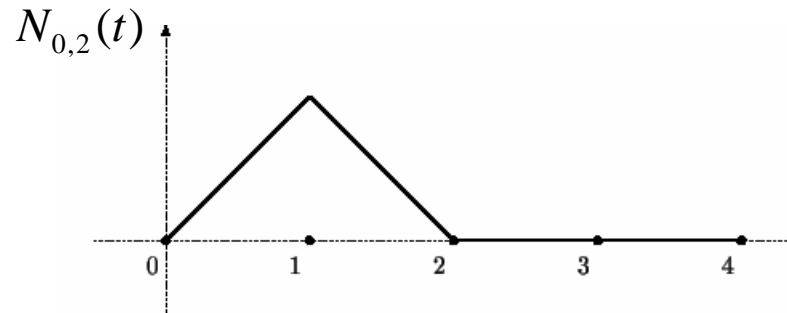
$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1 & t \in [t_i, t_{i+1}) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \{t_0, t_1, \dots, t_{n+k}\} \text{ knots sequence}$$

$k > 1$:

$$N_{i,k}(t) = \left(\frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} \right) N_{i,k-1}(t) + \left(\frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_{i+1}} \right) N_{i+1,k-1}(t) \quad t \in [t_{k-1}, t_{n+1})$$



B-Splines



$$N_{0,2}(t) = \frac{t-t_0}{t_1-t_0} N_{0,1}(t) + \frac{t_2-t}{t_2-t_1} N_{1,1}(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t < 1 \\ 2-t & 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$N_{1,2}(t) = \frac{t-t_1}{t_2-t_1} N_{1,1}(t) + \frac{t_3-t}{t_3-t_2} N_{2,1}(t) = \begin{cases} t-1 & 1 \leq t < 2 \\ 3-t & 2 \leq t < 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



B-Splines

- Il grado della B-Spline è definito dal numero di nodi (k)
- Se i nodi sono equispaziati: $N_{i+1,k}(t) = N_{i,k}(t-t_i)$
- Partizione dell'unità
- Bezier vs B-Splines:
 - n punti \Rightarrow grado n (curva di Bezier)
 - La curva di Bezier deve passare dal punto di controllo iniziale e finale
 - Le B-Splines sono locali ($N_{i,p}(t) \neq 0, t \in [t_i, t_{i+p+1})$)

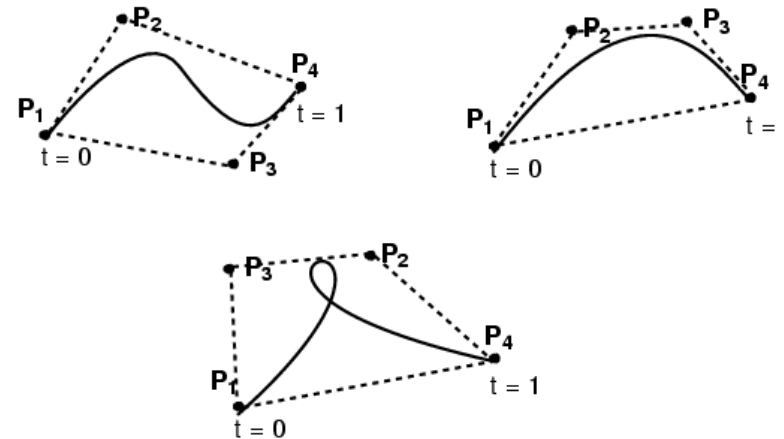
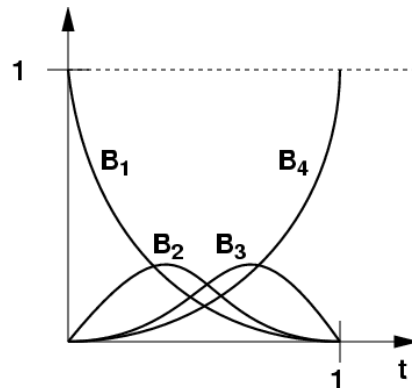
\Rightarrow B-Splines sono più complesse ma più flessibili!!



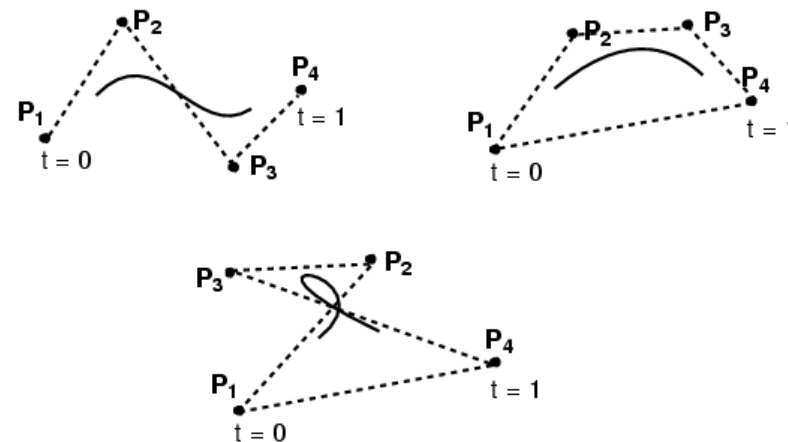
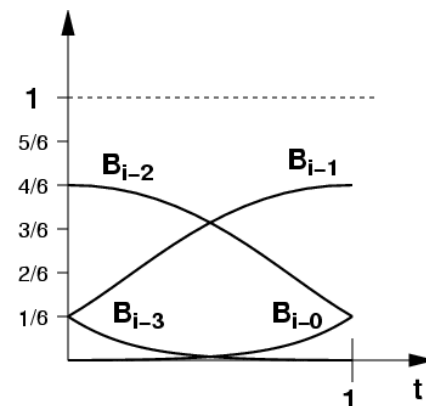
Bézier e B-Splines

- Le relazioni tra I punti di controllo sono differenti

Bézier



BSpline





Non-Uniform Rational B-Spline

$$P(t) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,k}(t) w_i P_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,k}(t) w_i}$$

- Non-uniform = spazio non uniforme tra le funzioni di blending (in altre parole i nodi non sono equispaziati)
- Rational = rapporto di polinomi
 - *Le coniche possono essere rappresentate solamente con il rapporto di polinomi*

Cerchio unitario: $\left[\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right] \quad 0 \leq t \leq 1$

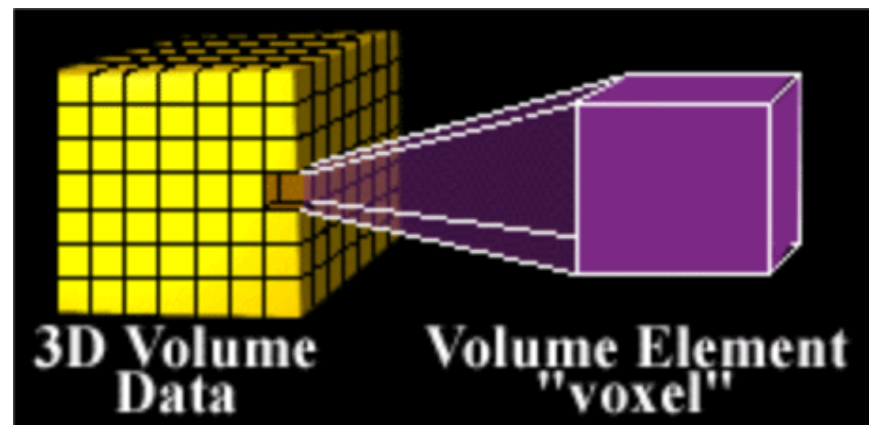
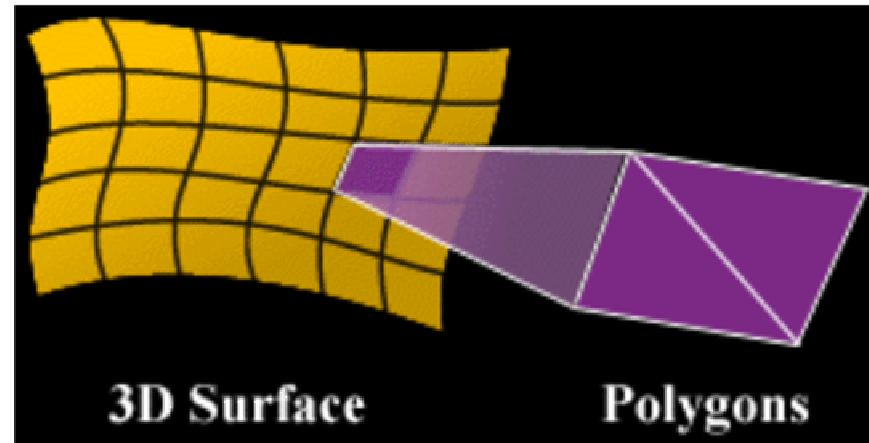


Rappresentazione Parametrica Confrontata con Meshes

Facoltà di
Ingegneria

- Le superfici parametriche possono essere convertite facilmente a mesh poligonali tramite campionamento.
- La parametrizzazione è ovvia.
- L'elaborazione geometrica che vi si può fare è analitica.
- Le superfici che si ottengono sono smooth e praticamente qualsiasi forma può essere rappresentata con un buon grado di approssimazione.
- E' una rappresentazione efficiente dal punto di vista della memoria (è sufficiente memorizzare i punti di controllo).

Modellazione di Volumi (Voxels)





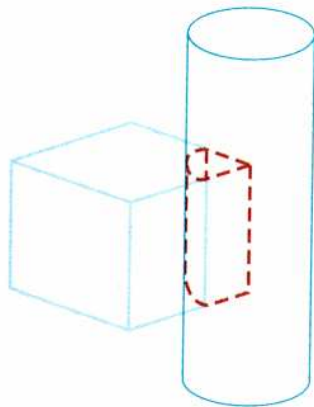
Voxels

- Sono prevalentemente utilizzati quando è importante l'informazione volumetrica (ad esempio nelle applicazioni mediche).
- Richiedono enormi quantità di memoria (e.g. $512 \times 512 \times 512 = 128$ MBits).
- Voxels sono utili per rappresentare isosuperfici.
- La conversione da voxel a mesh poligonale è "facile" (algoritmo Marching Cubes). Il viceversa è più complesso e tipicamente computazionalmente costoso.

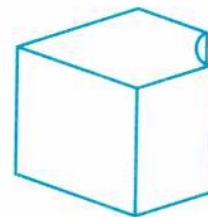


Geometria Solida Costruttiva (CSG)

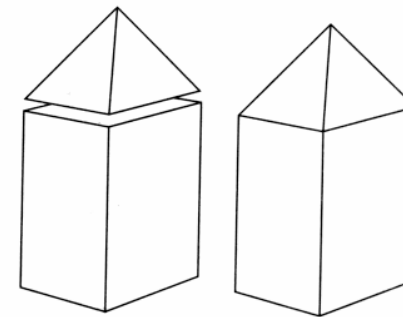
La forma finale dell'oggetto viene ottenuta combinando i volumi occupati da un insieme sovrapposto di forme tridimensionali tramite operazioni booleane (unione, differenza, intersezione).



intersezione



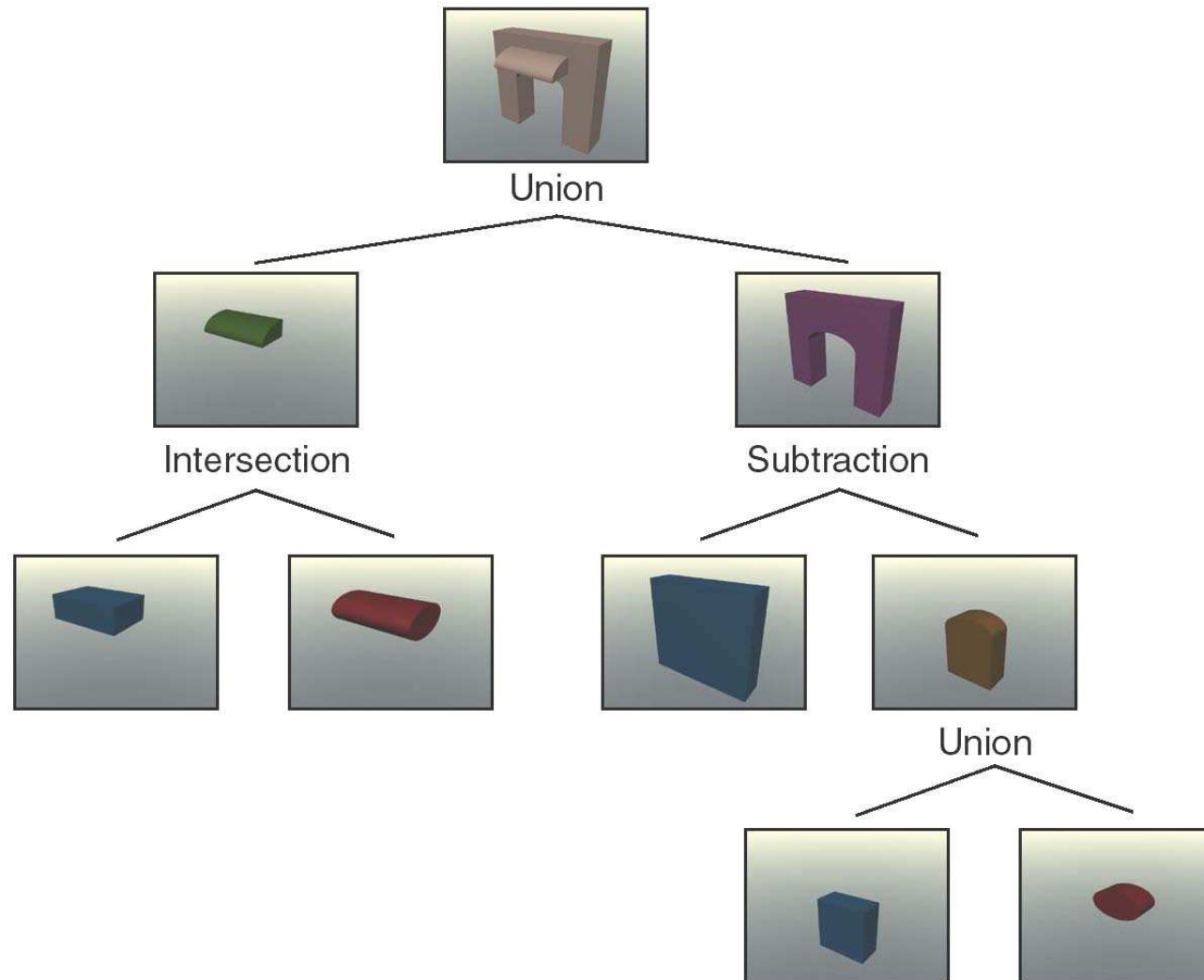
differenza



unione



Esempio di CSG





Domande?