Geometric Mesh Processing

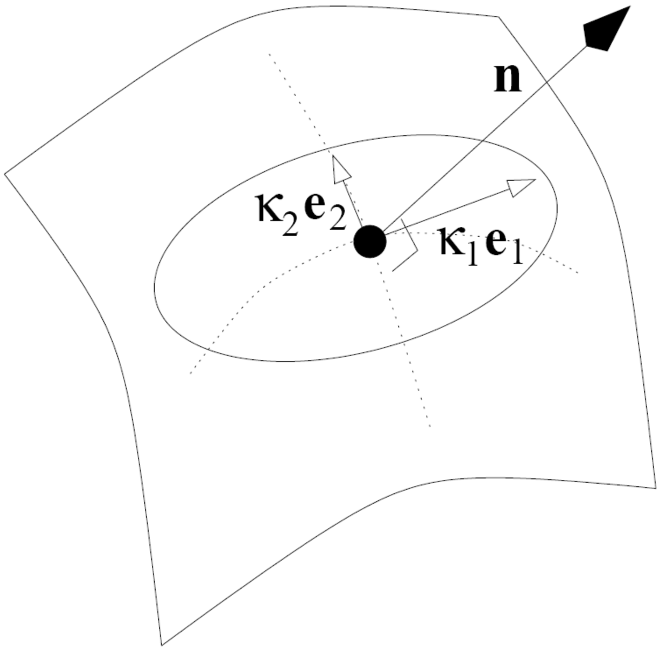
Paolo Cignoni
p.cignoni@isti.cnr.it
http://vcg.isti.cnr.it/~cignoni

Geometria Differenziale

- Consideriamo una superficie S 2manifold embedded in R^3
  - Supponiamo di avere una parametrizzazione in due variabili che descriva $S(u, v) \rightarrow R^3$
  - Supponiamo che la sup sia continua e derivabile e che si possa avere per ogni punto il piano tangente ad S e perpendicolare alla normale *n*

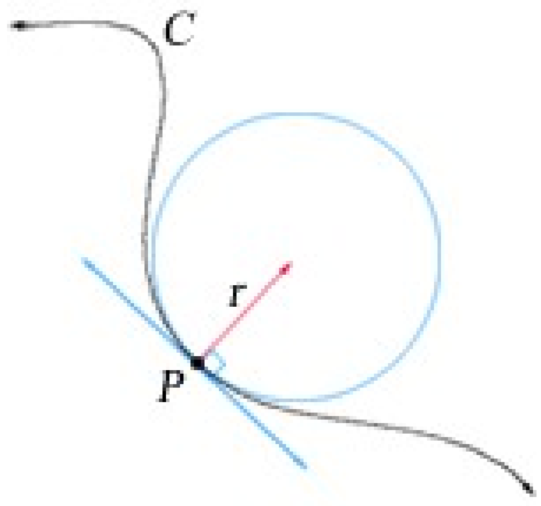
Curvatura di una superficie

- Per ogni direzione e_θ nel piano tangente
- Si può definire la curvatura $\kappa^N(\theta)$ come la curvatura della curva che appartiene all'intersezione tra il piano che contiene N e e_θ e la superficie stessa



Curvatura 2D

- Curvatura in un punto P è il reciproco del raggio di cerchio osculante (eg un cerchio che tocca la curva in P)
- Se si considera la curva come lo zero di una funzione f in R^2->R (pensate alle curve di livello), la curvatura è la divergenza del gradiente di f



Curvatura nel piano

- La vera definizione è:

$x(t), y(t) \quad una \quad curva \quad nel \quad piano$

$\phi \quad tangential\, angle$

$s \quad arc\, lenght$

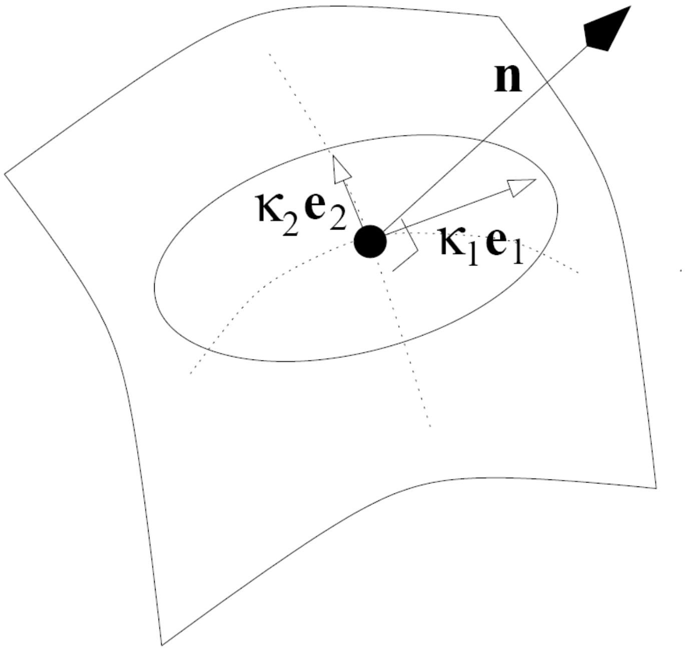
$$\kappa \equiv \frac{d\phi}{ds} = \frac{d\phi/dt}{ds/dt} = \frac{d\phi/dt}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}} = \frac{d\phi/dt}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

$$\kappa = \frac{x'y'' - y'x''}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}}$$

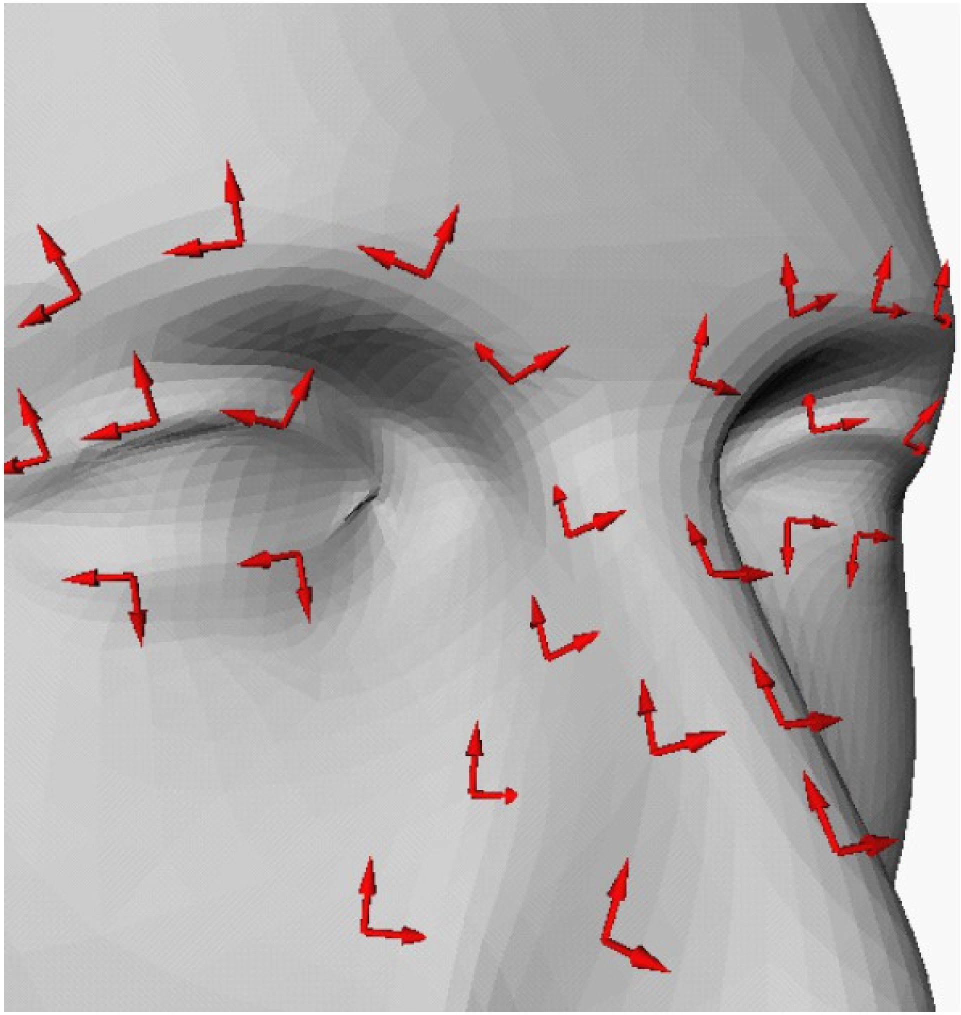
Curvatura Superficie

- Per ogni direzione ho una curvatura
- Considero le due direzioni lungo la quale la curvatura è max e min
- Si considerano positive se la direzione della curvatura nel piano concorda con la normale nel piano

$$\kappa_1, \kappa_2 \quad \textit{principal} \quad \textit{curvatures}$$
$$e_1, e_2 \quad \textit{principal} \quad \textit{directions}$$



Curvature principali



Curvatura Gaussiana e Media

- Def come prodotto delle curvature principali
  - Positiva per sfere
  - Negativa per iperboloidi

$$\kappa_G \equiv K \equiv \kappa_1 \cdot \kappa_2 \quad \textit{Gaussian curvature}$$

$$\bar{\kappa} \equiv H \equiv \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \quad \textit{Curvatura media}$$

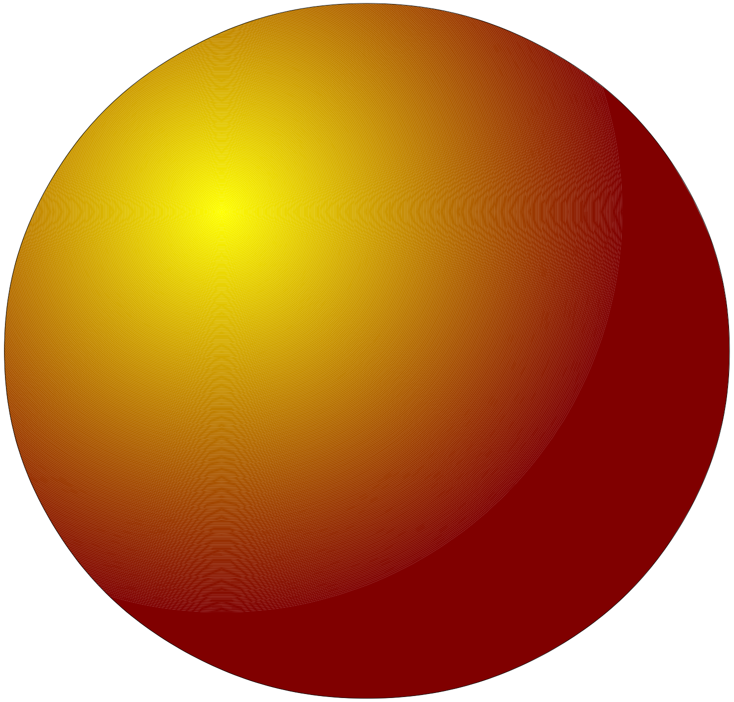
Intrinseco Estrinseco

- La curvatura gaussiana è una proprietà ***intrinseca*** della superficie anche se è definita in maniera ***estrinseca***
  - La potrebbe determinare un abitante ***X*** bidimensionale della superficie stessa
  - Se ***X*** descrive un cerchio di raggio *r* intorno ad un punto P della sup percorrendo una lunghezza C(r) vale che:

$$K = \lim_{r \to 0} \left(2\pi r - C(r)\right) \cdot \frac{3}{\pi r^3}$$

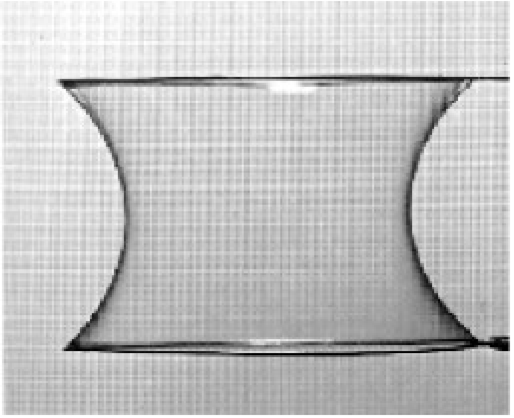
Curvatura Gaussiana

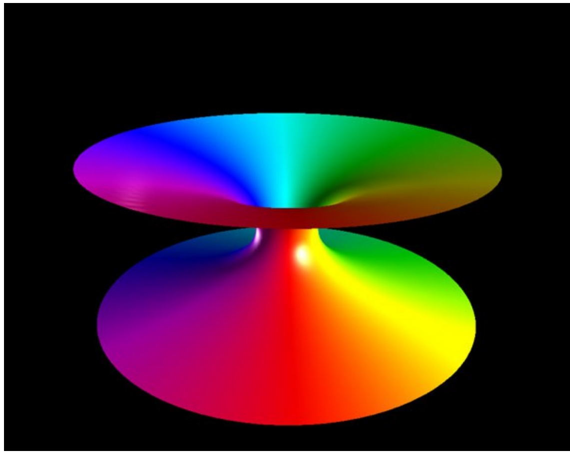
- Positiva e negativa



Curvatura Media

- Divergenza della normale alla superficie
  - divergence is an operator that measures a vector field's tendency to originate from or converge upon a given point
- Minimal surface and minimal area surfaces
  - Una superficie e' minima quando la sua curvatura media e' ovunque 0
  - Tutte le superfici di AREA minima area (subject to boundary constraints) hanno curvatura media = 0 (Non vale il contrario!)
- The surface tension of an interface, like a soap bubble, is proportional to its mean curvature





Curvatura Media

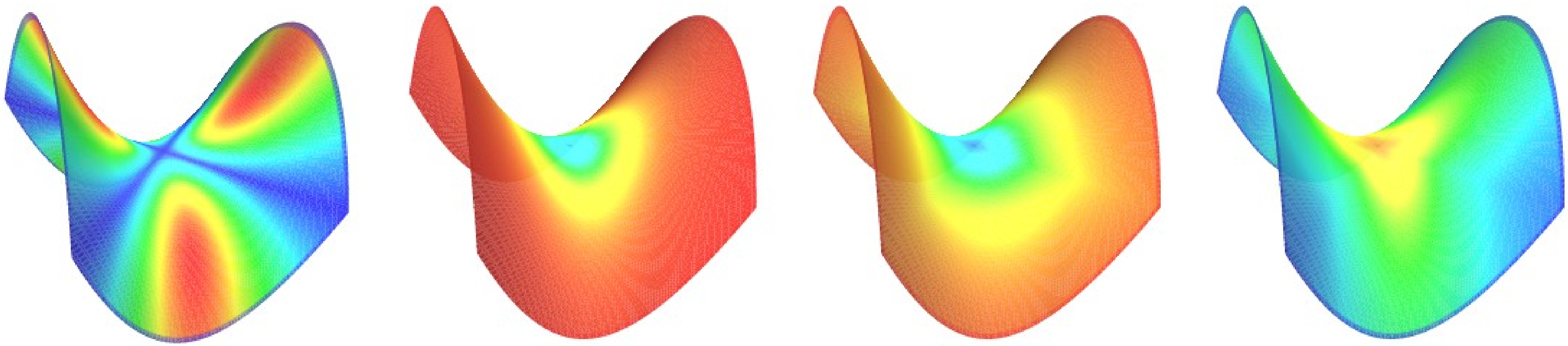
- Divergenza della normale alla superficie
- Se si considera un`area A intorno ad un punto

$$2\bar{\kappa}\,n = \lim_{diam(A)\to 0} \frac{\nabla A}{A}$$

- Dove ∇ è la derivata rispetto a xyz (e non alla parametrizzazione locale della superficie, in altre parole estrinseca e non intrinseca)
  - e.g. su un cilindro la curvature media <> 0

- Red > Blue , non nella stessa scala

mean gaussian min max

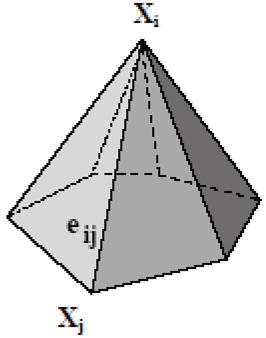


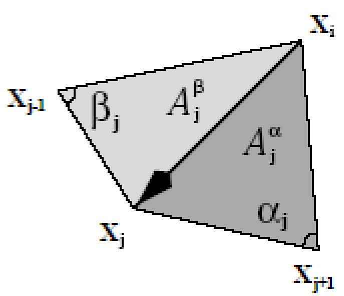
Curvatura media discreta

$$-\bar{\kappa}\,\mathbf{n} = \frac{1}{4A}\sum_{j\in N_1(i)}(\cot\alpha_j + \cot\beta_j)(x_j - x_i)$$

where α_j and β_j are the two angles opposite to the edge in the two triangles having the edge e_{ij} in common

A is the sum of the areas of the triangles





Curvatura Gaussiana discreta

- Ricordando che l 'integrale della curvatura gaussiana di una sup chiusa e' 4π

$$\kappa_G(v_i) = \frac{1}{3A}\left(2\pi - \sum_{t_j \, adj \, v_i} \theta_j\right)$$

Teorema Gauss-Bonnet

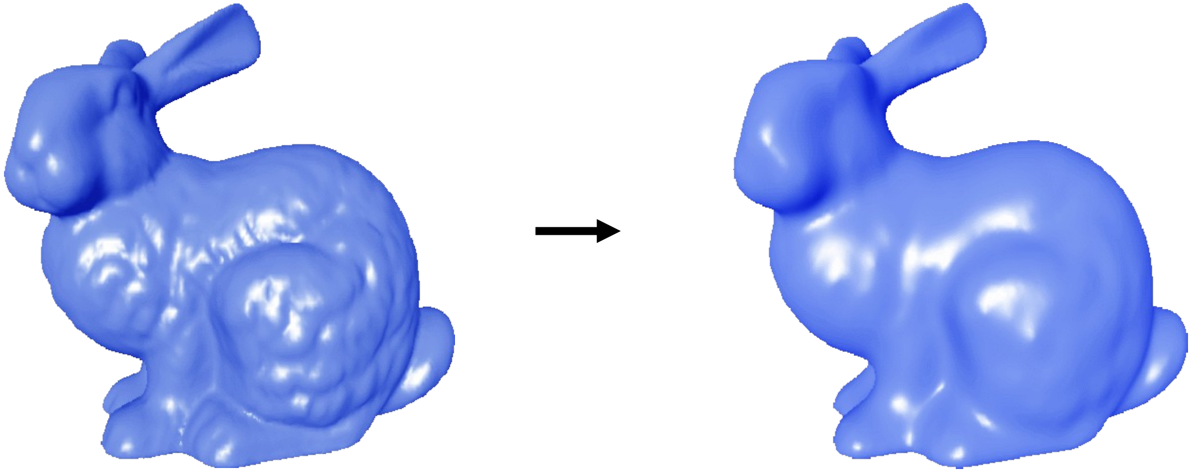
- L'integrale della curvatura gaussiana (su una superficie chiusa) è costante e dipende dalla caratteristica di eulero

$$\int_S \kappa_G = 2\pi\chi$$

Smoothing

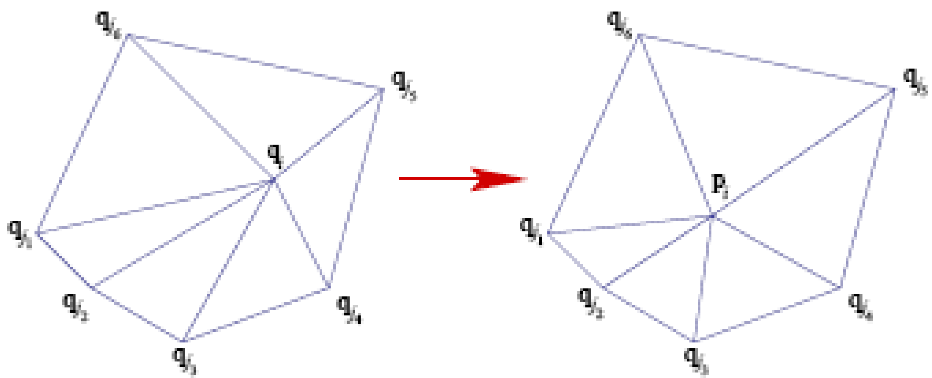
- Scopo filtrare via il rumore da una mesh
  - Come per image processing

Esempio



Discrete Laplacian Smoothing

- In pratica nella sua accezione piu' semplice il Laplacian smoothing (detto anche Gaussian Smoothing) significa:
  - For each vertex, compute the displacement vector towards the average of its neighbors. Then move each vertex by a fraction of its displacement vector.



Laplacian Smoothing

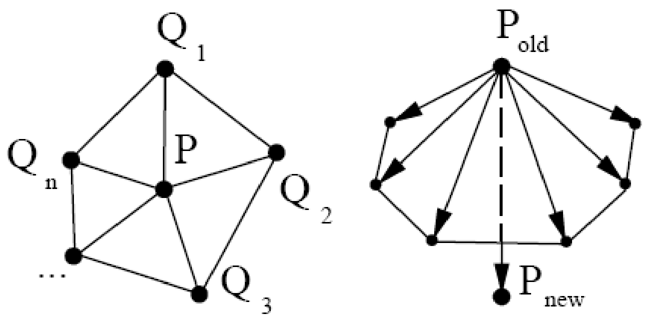
- In pratica:

$$P_{\text{new}} \longleftarrow P_{\text{old}} + \lambda \mathcal{U}(P_{\text{old}})$$

  - Dove come U (detto umbrella operator) si puo' scegliere

$$\mathcal{U}(P) = \frac{1}{\sum_i w_i} \sum_i w_i Q_i - P$$

$$\mathcal{U}_0(P) = \frac{1}{n} \sum_i Q_i - P,$$

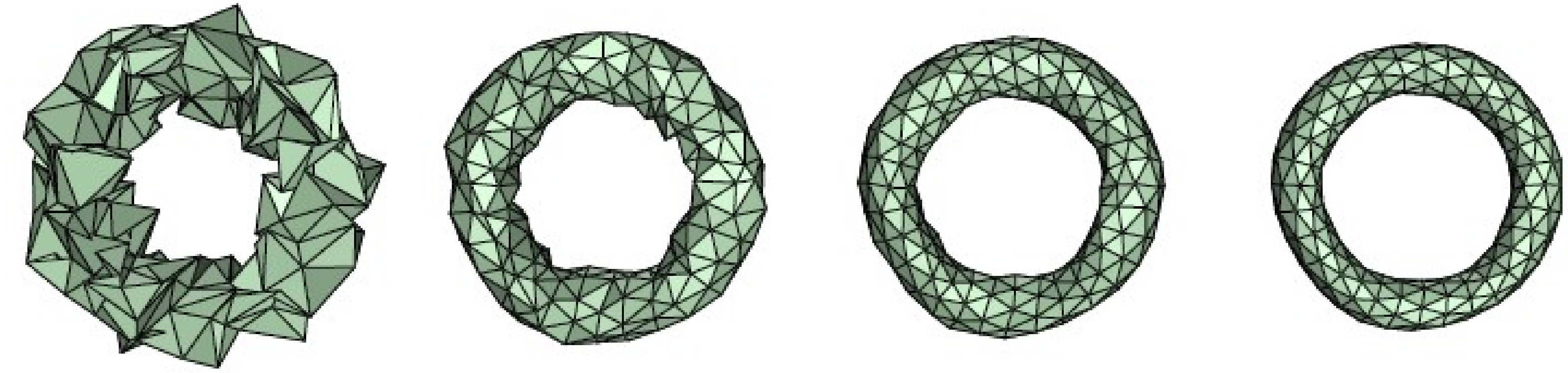


Laplacian Smoothing Implementation

- Qual'e' la struttura dati minimale per implementare il LS?
  - Se la mesh e' chiusa basta la relazione FV e un paio di variabili temporanee per ogni vertice
  - Si itera sulle facce (e non sui vertici) accumulando le somme parziali per ogni vertice...

Laplacian smoothing issues

- Tante!
- Il primo problema e' lo SHRINKING



Taubin smoothing

- Per ogni iterazione si fanno due passi
  - Si definiscono 2 costanti $\lambda>\square$ $\mu<\square$
    - compute the laplacian displacement for each vertex and moves the vertices by λ times this displacement.
    - Then compute again the laplacian and moves back each vertex by μ times the displacement.

$$
\begin{aligned}
P_{\text{new}} &\longleftarrow (1-\mu\mathcal{U})(1+\lambda\mathcal{U})P_{\text{old}} = \\
&= P_{\text{old}} - (\mu-\lambda)\mathcal{U}(P_{\text{old}}) - \mu\lambda\mathcal{U}^2(P_{\text{old}}),
\end{aligned}
$$

$$
\mathcal{U}^2(P) = \frac{1}{\sum_i w_i}\sum_i w_i\,\mathcal{U}(Q_i) - \mathcal{U}(P).
$$

  - $\lambda>\square$ $\mu>\square$ Parametri *mistici.*
    - Si possono definire constrain sui loro valori in modo tale da definire le proprieta' del filtro risultante (pass band frequency)

Taubin Smoothing

- In termini di spazio delle frequenze si puo' studiare l'effetto del TS in funzione dei parametri e del numero di volte che si applica

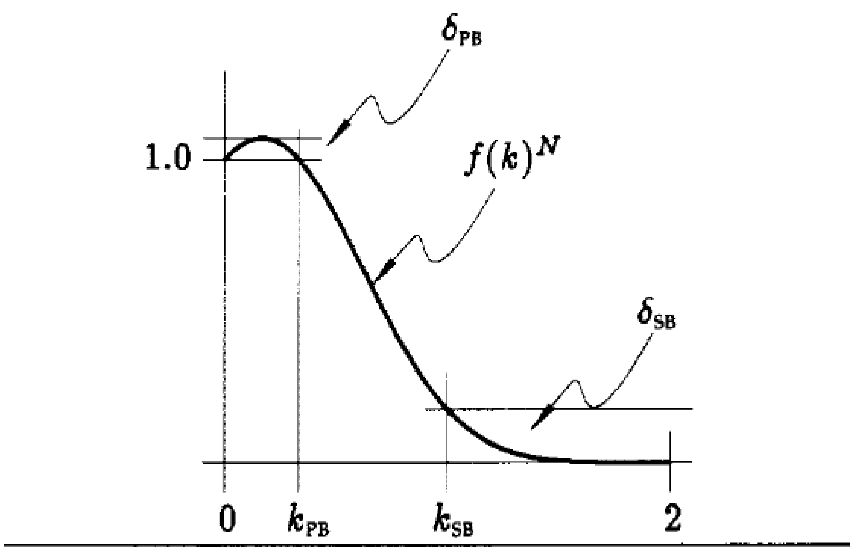


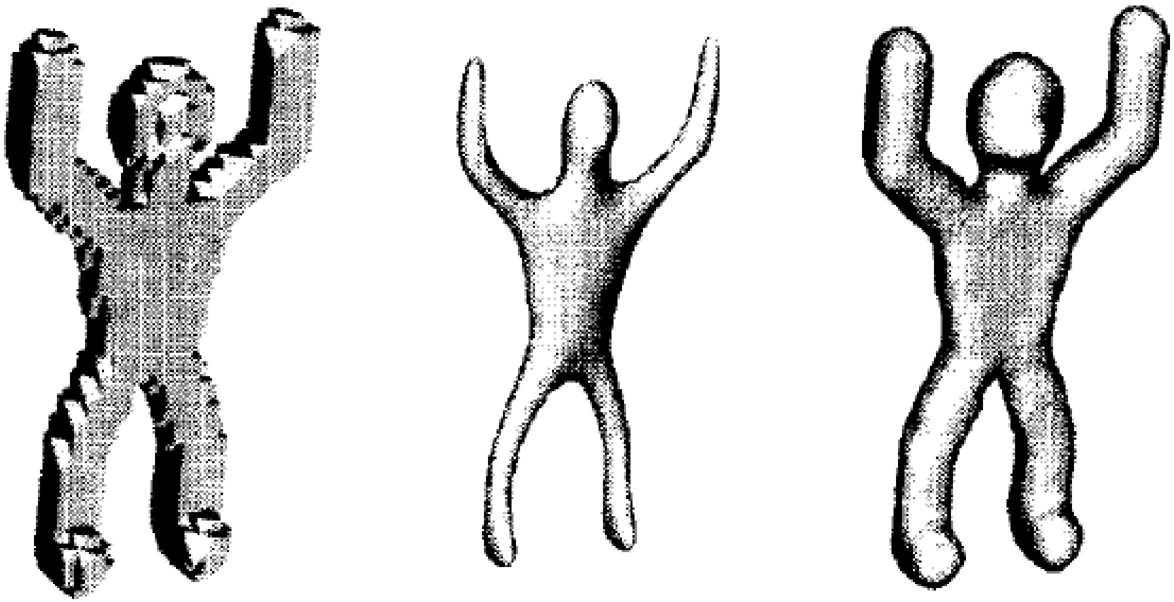
Figure 8: Graph of the transfer function $f(k)^N$.

$$0 < N \ , \ 0 < \lambda < -\mu \ , \ \lambda < \frac{1}{k_{SB}} \ , \ \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = k_{PB} \ .$$

$$\begin{aligned} \left((\lambda-\mu)^2)/(-4\lambda\mu)\right)^N &< 1 + \delta_{PB} \\ \left((1-\lambda\, k_{SB})(1-\mu\, k_{SB})\right)^N &< \delta_{SB} \ . \end{aligned}$$

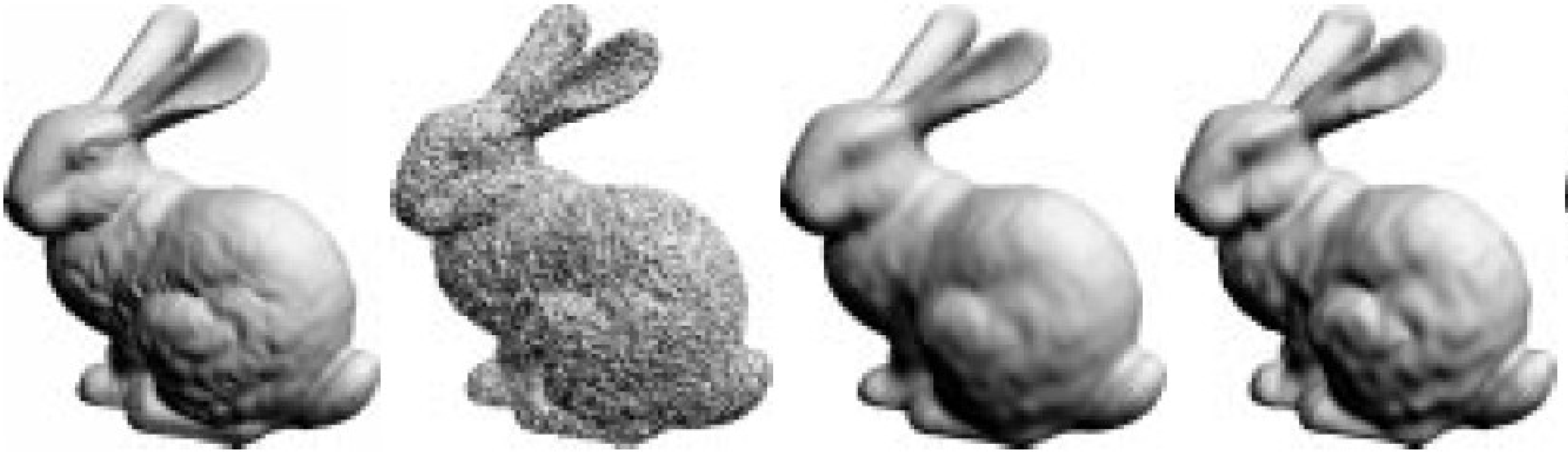
Taubin smooting in pratica

- B Laplacian Smoothing, C Taubin



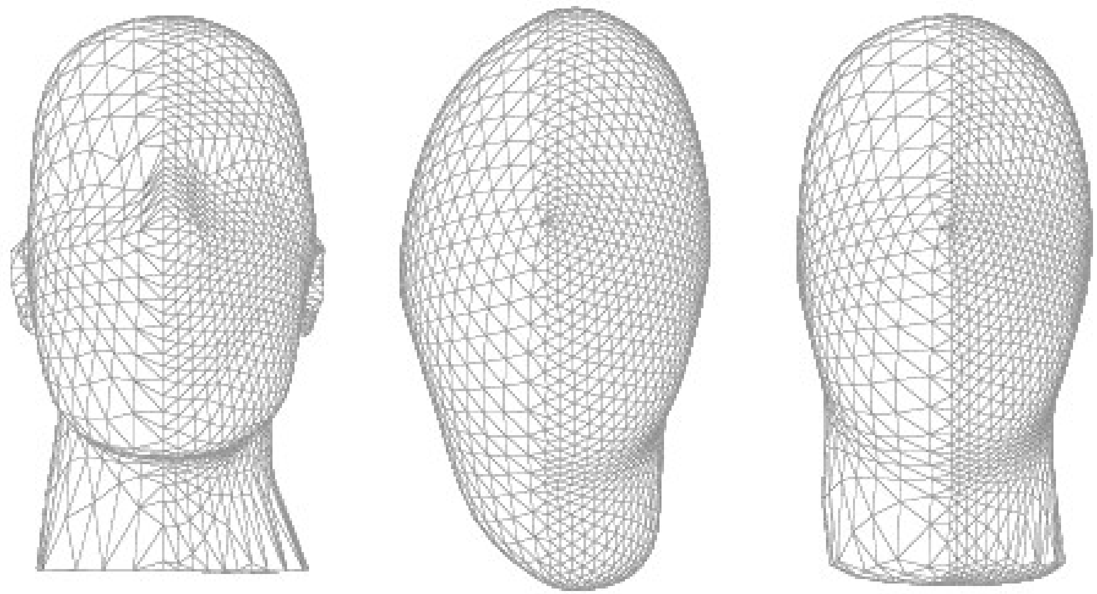
A B C

Taubin smooting in pratica

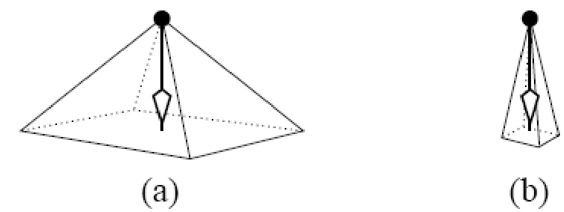


Issues

- Dipendenza dalla tassellazione della mesh



- a e b vengono spostati della stessa quantita`
- La parte a sx converge piu' rapidamente!



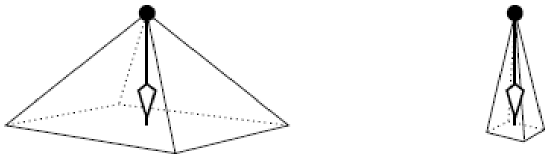
Scale Dependent Laplacian

- Si puo' sostituire l'operatore standard

$$L(x_i) = \frac{1}{m} \sum_{j \in N_1(i)} x_j - x_i$$

Con uno che tenga in considerazione la lunghezza degli edge coinvolti

$$L(x_i) = \frac{2}{E} \sum_{j \in N_1(i)} \frac{x_j - x_i}{|e_{ij}|}, \quad \text{with } E = \sum_{j \in N_1(i)} |e_{ij}|.$$



(a) (b)

Smoothing: interpretazione nel continuo

- Problema di minimizzazione dell'energia di una membrana
  - Al solito si ritorna al problema delle sup di area minima
  - Gradiente dell'energia e' il laplaciano
  - the Laplacian is the sum of all the unmixed second partial derivatives
  - Si sposta i vertici nella direzione che minimizza l'energia
- Laplaciano

$$L(M)=\frac{\partial^2 M}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 M}{\partial v^2}$$

- Versione discreta del laplaciano (Umbrella operator)

$$L_P(M)=\frac{1}{n}\sum_j (Q_j-P)$$

Smoothing: interpretazione nel continuo

- Si sposta i vertici nella direzione che minimizza l'energia
- Laplaciano e sua versione discreta

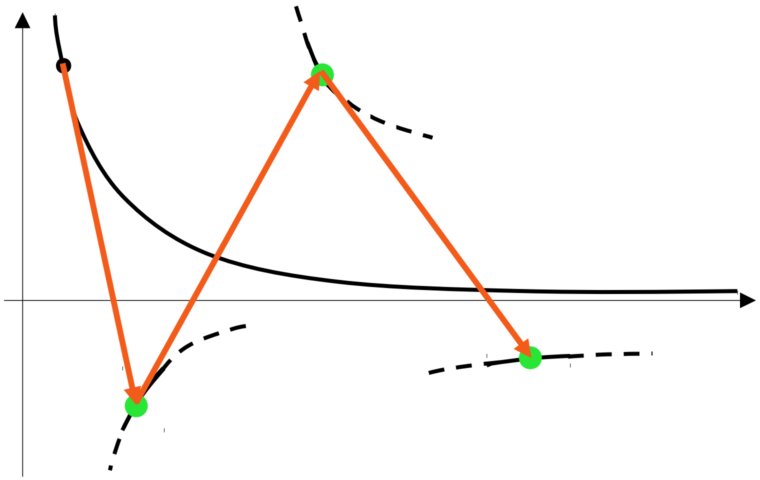
$$L(M) = \frac{\partial^2 M}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial v^2} \qquad L_P(M) = \frac{1}{n} \sum_j (Q_j - P)$$

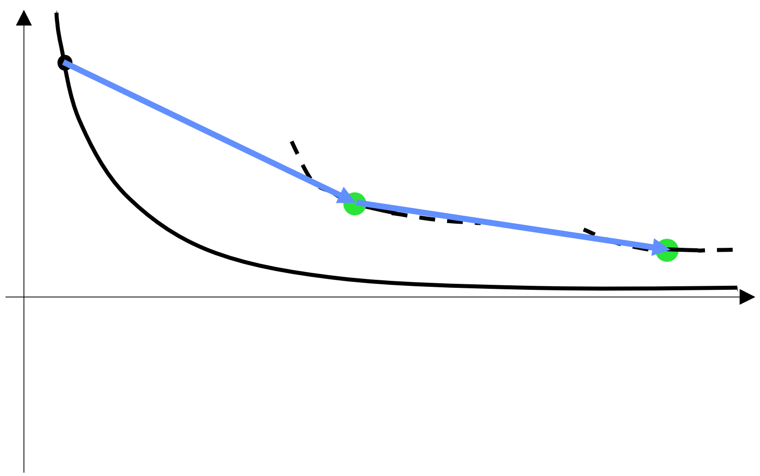
- Forma differenziale $\mathring{M} = \lambda L(M)$
- Si puo affrontare tramite integrazione diretta eulero

$$M_{t+dt} = M_t + \lambda L(M_t) dt \qquad M_{n+1} = (I + \lambda dt L) M_n$$

- Al solito, problema di stabilita' nella scelta di dt.
- Lo scale dependent Laplacian funziona MA richiede un dt dell'ordine del piu' piccolo edge...
-

Explicit euler scheme vs implicit euler scheme





$$y(t+dt)=y(t)+\mathring{y}(t)\,dt$$

$$M_{t+dt}=M_t+\lambda L(M_t)\,dt$$

$$M_{n+1}=(I+\lambda\, dt\, L)\,M_n$$

$$y(t+dt)=y(t)+\mathring{y}(t+dt)\,dt$$

$$M_{t+dt}=M_t+\lambda L(M_{t+dt})\,dt$$

$$M_{n+1}=M_n+\lambda\, dt\, L(M_{n+1})$$

$$(I-\lambda\, dt\, L)\,M_{n+1}=M_n$$

Implicit Fairing

$$(I - \lambda\, dt\, L)\, M_{n+1} = M_n$$

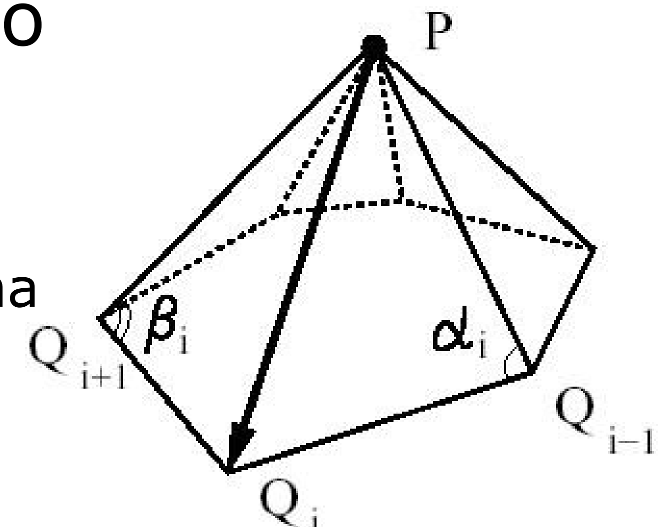
- Significa dover risolvere un sistema lineare sparso

$$A = I - \lambda\, dt\, L$$

  - ***M*** sono vertex coord
  - ***A*** ha in media sei elementi != 0 per riga...
  - Preconditioned Biconjugate gradient methods

Mean Curvature Flow

- Altra idea: considerare in modo diverso le zone a differente curvatura
    - Si usa la curvatura media nella forma differenziale



$$\mathbf{P}_{new} = \mathbf{P}_{old} + \lambda \mathbf{Hn}(\mathbf{P}_{old}) \quad (6)$$

where

$$\mathbf{Hn}(\mathbf{P}) = \frac{1}{4A} \sum_i (cota_i + cotb_i)(\mathbf{Q}_i - \mathbf{P})$$

$\mathbf{Hn}(\mathbf{P})$ is the mean curvature vector, A is the sum of the areas of the star triangles of the vertex $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}_i$ are the star vertices of $\mathbf{P}$ and a_i, b_i are as described in [1].

Curvature Flow Evaluation