
Fondamenti di Grafica Tridimensionale

Paolo Cignoni
p.cignoni@isti.cnr.it
<http://vcg.isti.cnr.it/~cignoni>

1

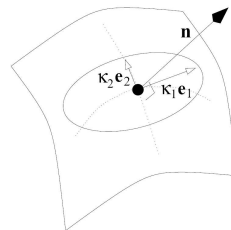
Geometria Differenziale

- ❖ Consideriamo una superficie S 2-manifold embedded in R^3
 - ❖ Supponiamo di avere una parametrizzazione in due variabili che descriva $S(u, v) \rightarrow R^3$
 - ❖ Supponiamo che la sup sia continua e derivabile e che si possa avere per ogni punto il piano tangente ad S e perpendicolare alla normale n

2

Curvatura di una superficie

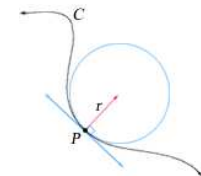
- ❖ Per ogni direzione e_θ nel piano tangente
- ❖ Si può definire la curvatura $\kappa^N(\theta)$ come la curvatura della curva che appartiene all'intersezione tra il piano che contiene N e e_θ e la superficie stessa



3

Curvatura

- ❖ Curvature in un punto P è il reciproco del raggio di cerchio osculante (eg un cerchio che tocca la curva in P)
- ❖ Se si considera la curva come lo zero di una funzione f in $R^2 \rightarrow R$ (pensate alle curve di livello), la curvatura è la divergenza del gradiente di f



4

Curvatura nel piano

❖ La vera definizione è:

$x(t), y(t)$ una curva nel piano

ϕ tangential angle

s arclenght

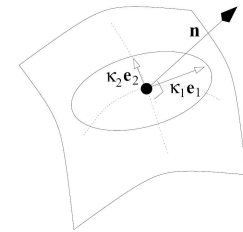
$$\kappa \equiv \frac{d\phi}{ds} = \frac{d\phi/dt}{ds/dt} = \frac{d\phi/dt}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}} = \frac{d\phi/dt}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

$$\kappa = \frac{x' y'' - y' x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

5

Curvatura Superficie

- ❖ Per ogni direzione ho una curvatura
- ❖ Considero le due direzioni lungo la quale la curvatura è max e min
- ❖ Si considerano positive se la direzione della curvatura nel piano concorda con la normale nel piano

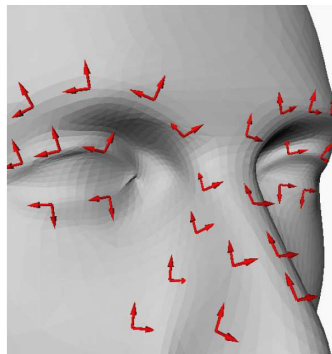


κ_1, κ_2 principal curvatures

e_1, e_2 principal directions

6

Curvature principali



Curvatura Gaussiana e Media

- ❖ Def come prodotto delle curvature principali
- ❖ Positiva per sfere
- ❖ Negativa per iperboloidi

$$\kappa_G \equiv K \equiv \kappa_1 \cdot \kappa_2 \text{ Gaussian curvature}$$

$$\bar{\kappa} \equiv H \equiv \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \text{ Curvatura media}$$

8

Intrinseco Estrinseco

- ❖ La curvatura gaussiana è una proprietà **intrinseca** della superficie anche se è definita in maniera **estrinseca**
- ❖ La potrebbe determinare un abitante *a* bidimensionale della superficie stessa
- ❖ Se *a* descrive un cerchio di raggio *r* intorno ad un punto P della sup percorrendo una lung. *C(r)* vale che:

$$K = \lim_{r \rightarrow 0} (2\pi r - C(r)) \cdot \frac{3}{\pi r^3}$$

9

Curvatura Media

- ❖ Divergenza della normale alla superficie
- ❖ Strettamente correlata con il problema della minimizzazione dell'area di una sup.
- ❖ Se si considera un'area *A* intorno ad un punto

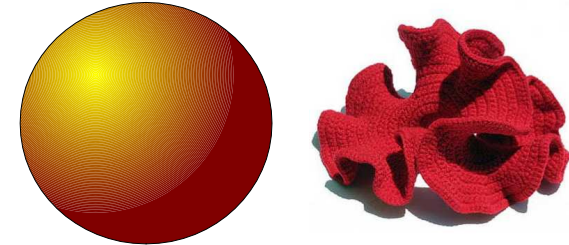
$$2\bar{\kappa}n = \lim_{\text{diam}(A) \rightarrow 0} \frac{\nabla A}{A}$$

- ❖ Dove è la derivata rispetto a xyz (e non alla param locale della superficie, in altre parole estrinseca e non intrinseca)

11

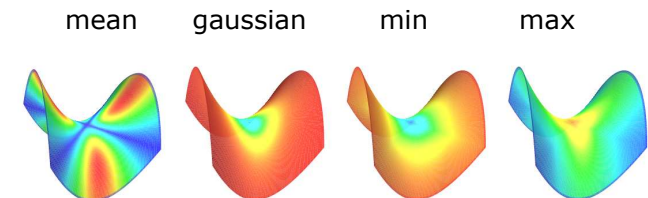
Curvatura Gaussiana

- ❖ Positiva e negativa



10

- ❖ Red > 0 Blue < 0, non nella stessa scala

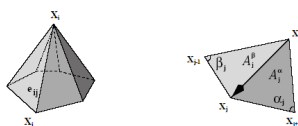


12

Curvatura media discreta

$$-\bar{\kappa} \mathbf{n} = \frac{1}{4A} \sum_{j \in \mathcal{N}_1(i)} (\cot \alpha_j + \cot \beta_j)(x_j - x_i)$$

where α_j and β_j are the two angles opposite to the edge in the two triangles having the edge e_{ij} in common
 A is the sum of the areas of the triangles



13

Euler characteristic

- ❖ Invariante topologico

$$\chi = V - E + F$$

$$\chi = |\Sigma_0| - |\Sigma_1| + |\Sigma_2| - \dots$$

- ❖ Per tutto quello omeomorfo ad una sfera

$$\chi = 2$$

- ❖ In generale per una sup qualsiasi

$$\chi = g - 2$$

- ❖ Con g genus della superficie

15

Curvatura Gaussiana discreta

- ❖ Ricordando che l'integrale della curvatura gaussiana di una sup chiusa e'

4π

$$\kappa_G(v_i) = \frac{1}{3A} (2\pi - \sum_{t, \text{adj } v_i} \theta_j)$$

Teorema Gauss-Bonnet

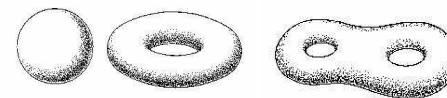
- ❖ L'integrale della curvatura gaussiana (su una superficie chiusa) è costante e dipende dalla caratteristica di eulero

$$\int_S \kappa_G = 2\pi \chi$$

14

genus

- ❖ Il genus di una superficie chiusa, orientabile 2-manifold e' il massimo numero di tagli lungo curve chiuse semplici che si possono fare senza rendere l'insieme sconnesso



Per i profani numero di maniglie sulla superficie

16

Smoothing

- ❖ Scopo filtrare via il rumore da una mesh
- ❖ Come per image processing

