Fondamenti di Grafica 3D

Sistemi di riferimento e trasformazioni

paolo.cignoni@isti.cnr.it
http://vcg.isti.cnr.it/~cignoni

Introduzione

- Punti e vettori sono due cose diverse
- Basi e sistemi di riferimento (coordinate systems and frames)
- Coordinate omogenee
- Trasformazioni Affini

Punti e vettori

- Punto
  - Entità il cui unico attributo è la sua posizione rispetto ad un sistema di riferimento
- Vettore
  - Entità i cui attributi sono lunghezza direzione

- Spesso si visualizza un punto come un vettore dall'origine a quel punto: *pericoloso*. Sono oggetti diversi.

Spazio Vettoriale

- Spazio dove ci sono due entità
  - scalari α, β, γ
  - vettori u, v, w
- Operazioni:
  - Somma e moltiplicazione tra scalari
  - Somma vettore-vettore
  - Moltiplicazione scalare-vettore

Spazio Vettioriale

- Altre operazioni utili che assumo vi ricordiate:
  - Prodotto scalare vettorexvettore -> scalare
    - (aka dot product)
  - Prodotto vettore vettorexvettore -> vettore
    - (aka cross product)

Spazio affine

- Spazio dove ci sono tre entità
  - Scalari, α, β, γ
  - vettori, u, v, w
  - punti P, Q, R
- Operazioni:
  - Quelle di uno spazio vettoriale
  - Somma punto:vettore-> punto $P = v + Q$
  - Sottrazione punto:punto -> vettore $v = P - Q$

Sistemi di coordinate

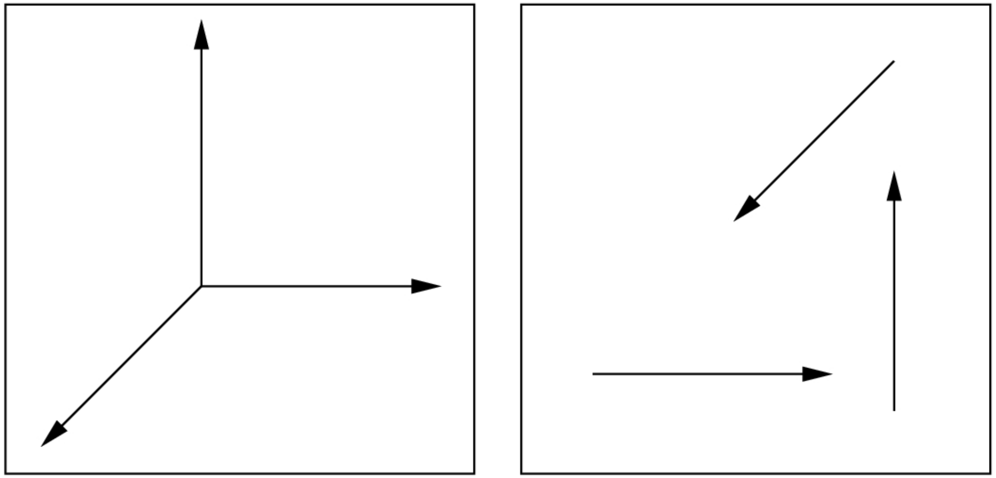
- In uno spazio vettoriale 3d si può rappresentare univocamente un vettore *w* in termini di tre vettori linearmente indipendenti; I tre vettori usati sono una base di quello spazio

$$\{v_1, v_2, v_3\} \qquad w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \qquad w = \mathbf{a}^T \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Sistemi di riferimento

- Una base (tre vettori, linearmente indipendenti) non basta per definire la posizione di un punto.



(a) (b)

- Occorre anche un punto di riferimento, l'origine.

Sistemi di riferimento

- Un *frame* (sistema di riferimento) necessita quindi di un **punto di origine** P_0 e di una **base**. In esso si può rappresentare univocamente un punto

$$P = P_0 + \eta_1 v_1 + \eta_2 v_2 + \eta_3 v_3$$

- *Nota:* bastano tre scalari per rappresentare un punto, come per un vettore…

Cambio sistemi di coordinate 1

- In uno spazio vettoriale, date due basi.

$$\{v_1, v_2, v_3\} \quad \{u_1, u_2, u_3\}$$

- Esprimiamo una in termini dell'altra:

$$u_1 = \gamma_{11}v_1 + \gamma_{12}v_2 + \gamma_{13}v_3$$
$$u_2 = \gamma_{21}v_1 + \gamma_{22}v_2 + \gamma_{23}v_3$$
$$u_3 = \gamma_{31}v_1 + \gamma_{32}v_2 + \gamma_{33}v_3$$

- Questo definisce la matrice 3x3 M di cambiamento di base

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Cambio sistemi di coordinate 2

- Dato un vettore w

$$w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \quad w = \mathbf{a}^T \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

- Ne ottengo la sua rappresentazione nell'altro sistema di coordinate usando la matrice M

$$w = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{a} = \mathbf{M}^T \mathbf{b}$$

Cambio sistemi di coordinate 3

- Nota che si sta parlando di vettori e non di punti
- Questi cambi di base lasciano l'origine immutata (cambiano vettori)
- In altre parole rappresentano solo rotazioni e scalature.
- Un cambio di sistema di riferimento coinvolge anche un cambio del punto di origine.

Coordinate Omogenee

- Per definire un frame bastano tre vettori ed un punto.

$$\{v_1, v_2, v_3, P_0\}$$

$$P = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + P_0$$

$$P = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ 1] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ P_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 1 \cdot P = P \\ 0 \cdot P = \varnothing \end{cases}$$

Coordinate Omogenee

- Si dice che un punto *P* è rappresentato dalla matrice colonna **p**

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- E un vettore *w* è rappresentato dalla matrice colonna **a**

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cambio di Frame

- Dati due sistemi di riferimento.

$$\{v_1, v_2, v_3, P_0\} \quad \{u_1, u_2, u_3, Q_0\}$$

- Esprimiamo uno in termini dell'altro:

$$u_1 = \gamma_{11}v_1 + \gamma_{12}v_2 + \gamma_{13}v_3$$
$$u_2 = \gamma_{21}v_1 + \gamma_{22}v_2 + \gamma_{23}v_3$$
$$u_3 = \gamma_{31}v_1 + \gamma_{32}v_2 + \gamma_{33}v_3$$
$$Q_0 = \gamma_{41}v_1 + \gamma_{42}v_2 + \gamma_{43}v_3 + P_0$$

- Questo definisce la matrice 4x4 di cambiamento di frame

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & 0 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & 0 \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & 0 \\ \gamma_{41} & \gamma_{42} & \gamma_{43} & 1 \end{bmatrix}$$

Cambio di Frame

- La matrice di cambiamento di frame

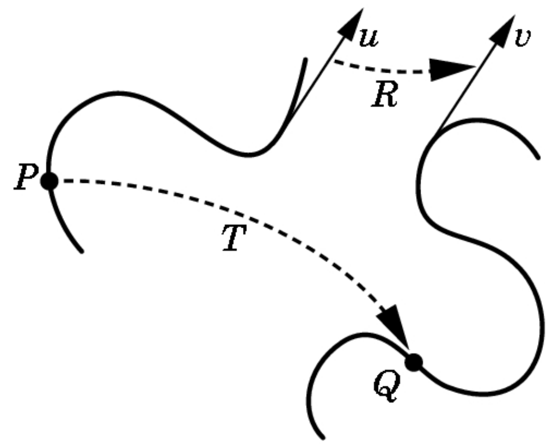
$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ Q_0 \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ P_0 \end{bmatrix}$$

- Date le due rappresentazioni **a,b** in coordinate omogenee in differenti frame (sia di un vettore che di un punto), vale:

$$\mathbf{b}^T \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ Q_0 \end{bmatrix} = \mathbf{b}^T M \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ P_0 \end{bmatrix} = \mathbf{a}^T \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ P_0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} = \mathbf{M}^T \mathbf{b}$$

Trasformazioni Affini

- Funzioni che prendono un punto (o un vettore) e lo mappano in un altro punto (o vettore)
- Lavorando in coord omogenee
- Ci interessano trasformazioni che siano *lineari*



$$\mathbf{q} = f(\mathbf{p})$$

$$\mathbf{v} = f(\mathbf{u})$$

$$f(\alpha p + \beta q) = \alpha f(p) + \beta f(q)$$

Trasformazioni affini

- Preservano la colinearita’
  - Tutti i punti inizialmente su una linea giacciono ancora su di una linea dopo la trasformazione

E

- I rapporti tra le distanze
  - Il punto di mezzo di un segmento rimane il punto di mezzo di un segmento anche dopo la trasformazione.

Trasformazioni Affini

- Dato un punto ed una sua rappresentazione Ogni trasformazione lineare trasforma il punto nel punto che ha la stessa rappresentazione ma in un altro sistema di coordinate.

$$P = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + P_0$$

$$f(P) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \alpha_3 f(v_3) + f(P_0)$$

Trasformazioni Affini

- quindi può sempre essere scritta in termini del rapporto che lega i due sistemi di riferimento
- v=Au
- Se A è non singolare una trasf affine corrisponde ad un cambio di coordinate

Trasformazioni Affini

- In coordinate omogenee la matrice A deve anche lasciare immutata la quarta componente della rappresentazione

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Trasformazioni Affini

- Notare che se u è un vettore solo 9 elementi di A sono usati nella trasformazione

$$\mathbf{Au} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- La quarta colonna corrisponde alla quarta riga della matrice di cambiamento di frame, che conteneva il nuovo punto di origine del frame (che chiaramente non serve se si parla di vettori)

Trasformazioni Affini

- Preservano le linee
- Consideriamo una linea espressa nella forma parametrica

$$P(\alpha) = P_0 + \alpha\, d$$

- Consideriamone la sua rapp. in coordinate omogenee

$$\mathbf{p}(\alpha) = \mathbf{p}_0 + \alpha\,\mathbf{d}$$

- A è una trasformazione affine

$$\mathbf{Ap}(\alpha) = \mathbf{Ap}_0 + \alpha\mathbf{A}\,\mathbf{d}$$

Esercizio

- Considerando che una trasformazione affine puo’ essere pensata come un cambio di frame, come è fatta una matrice T che trasforma un punto spostandolo di un certo vettore Q?

Coordinate Omogenee

- Si dice che un punto *P* è rappresentato dalla matrice colonna **p**

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- E un vettore *w* è rappresentato dalla matrice colonna **a**

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Trasformazioni Affini

- Notare che se u è un vettore solo 9 elementi di A sono usati nella trasformazione

$$\mathbf{Au} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

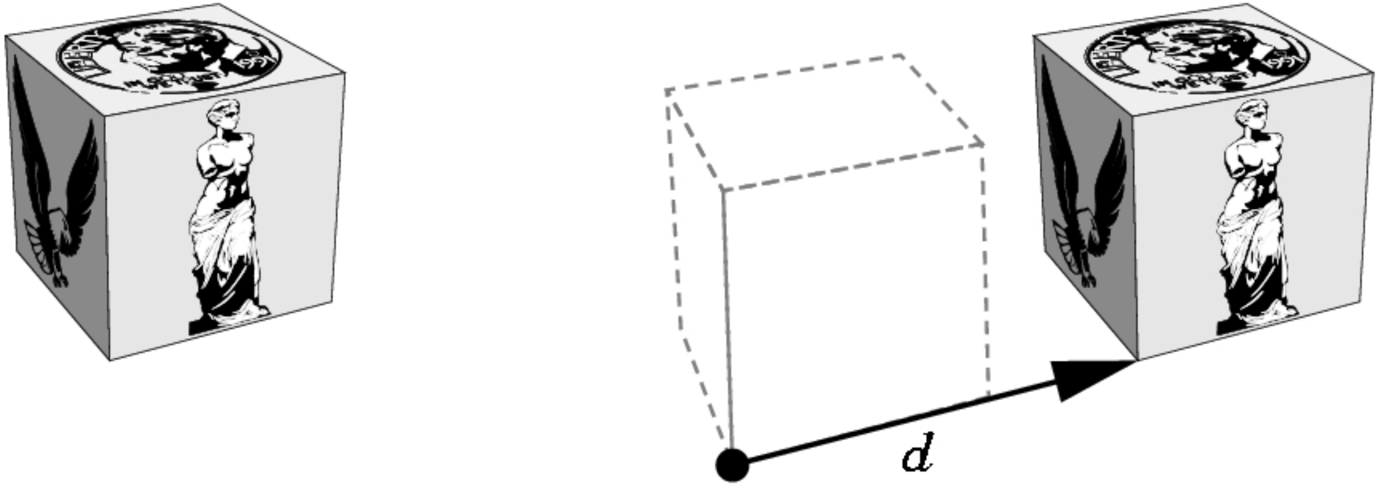
- La quarta colonna corrisponde alla quarta riga della matrice di cambiamento di frame, che conteneva il nuovo punto di origine del frame (che chiaramente non serve se si parla di vettori)

Traslazione

- modifica i punti di un frame sommando a tutti i punti un vettore di spostamento *d*

$$P' = P + d$$

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \mathbf{d}$$



(a) (b)

Traslazione

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \mathbf{d} \qquad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}' = \mathbf{T}\mathbf{p} \qquad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha_x \\ 0 & 1 & 0 & \alpha_y \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

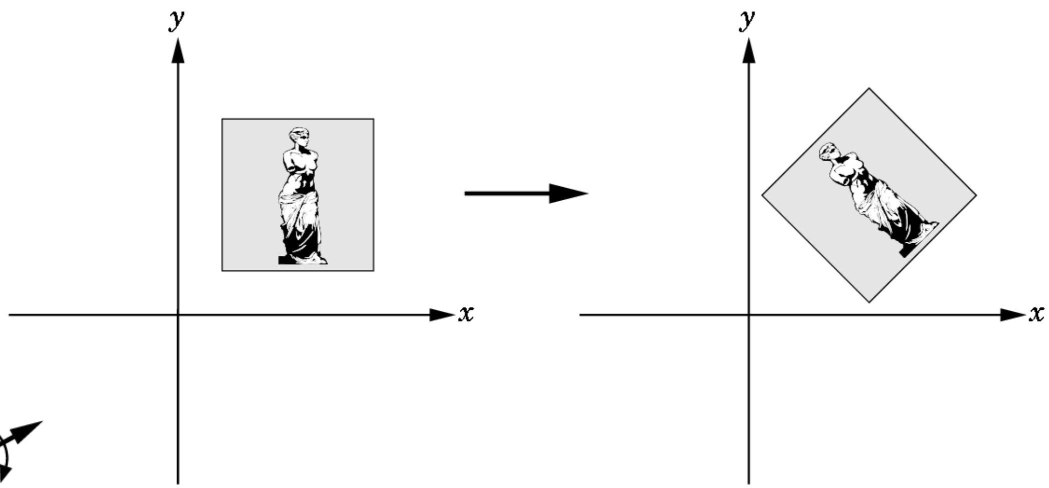
Traslazione

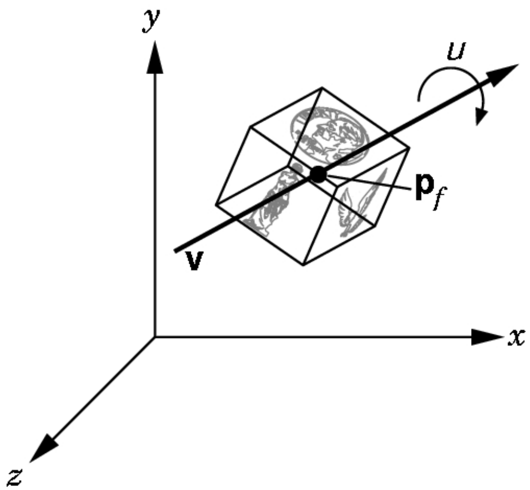
$$\mathbf{T}(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha_x \\ 0 & 1 & 0 & \alpha_y \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}^{-1}(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z) = \mathbf{T}(-\alpha_x, -\alpha_y, -\alpha_z) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\alpha_x \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha_y \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotazione

- Di una rotazione si deve specificare
  - angolo,
  - asse
  - punto di applicazione

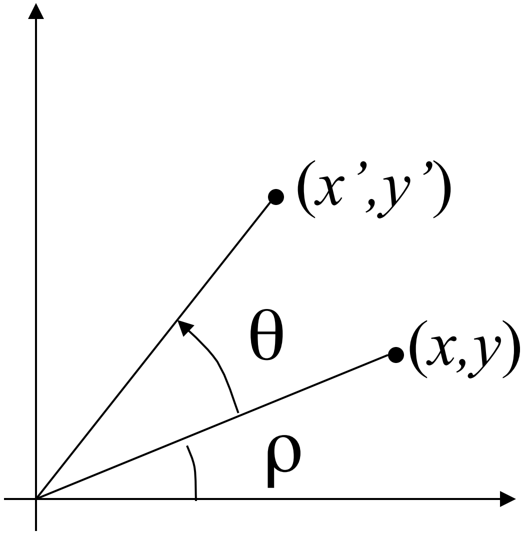




Rotazione

- Caso semplice asse z, intorno all'origine, di un'angolo θ

$$x = \rho \cos\phi$$
$$y = \rho \sin\phi$$
$$x' = \rho \cos(\phi + \theta)$$
$$y' = \rho \sin(\phi + \theta)$$



Rotazione

$$x = \rho \cos\phi$$

$$y = \rho \sin\phi$$

$$x' = \rho \cos\phi \cos\theta - \rho \sin\phi \sin\theta = x \cos\theta - y \sin\theta$$

$$y' = \rho \cos\phi \sin\theta + \rho \sin\phi \cos\theta = x \sin\theta + y \cos\theta$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Rotazioni

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = R(\theta)_Z \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R(\theta)_Z = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotazioni

$$R(\theta)_Y = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R(\theta)_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotazioni

- Le matrici di rotazione viste finora sono facilmente invertibili

$$\mathbf{R}^{-1}(\theta) = \mathbf{R}(-\theta)$$

$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$$

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$$

- Quindi basta trasporre…

$$\mathbf{R}^{-1}(\theta) = \mathbf{R}^{T}(\theta)$$

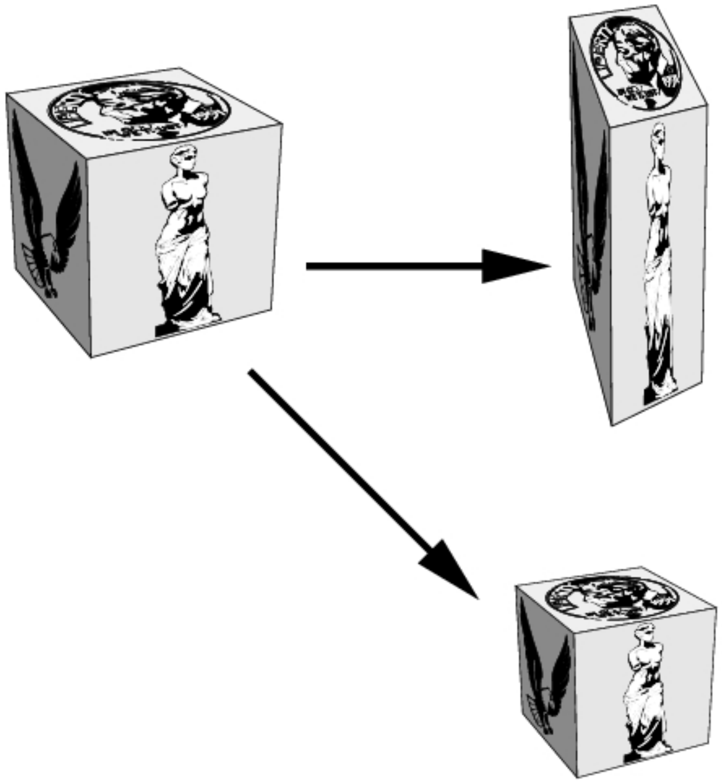
Rotazioni Complesse

- Rotazioni centrate non sull'origine
- Rotazioni su assi diversi da quelli principali

- Si ottengono per composizione di trasformazioni

Scaling

- Non rigida
- Non uniforme lungo gli assi
- Solo centrata rispetto all'origine



$$x' = \beta_x x$$

$$y' = \beta_y y$$

$$z' = \beta_z z$$

$$S(\beta_x, \beta_y, \beta_z)_X = \begin{bmatrix} \beta_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Object Frame

- Perché ogni oggetto ha il suo sistema di riferimento?
  - Uso Multiplo di uno stesso oggetto
  - Posizione parametrica