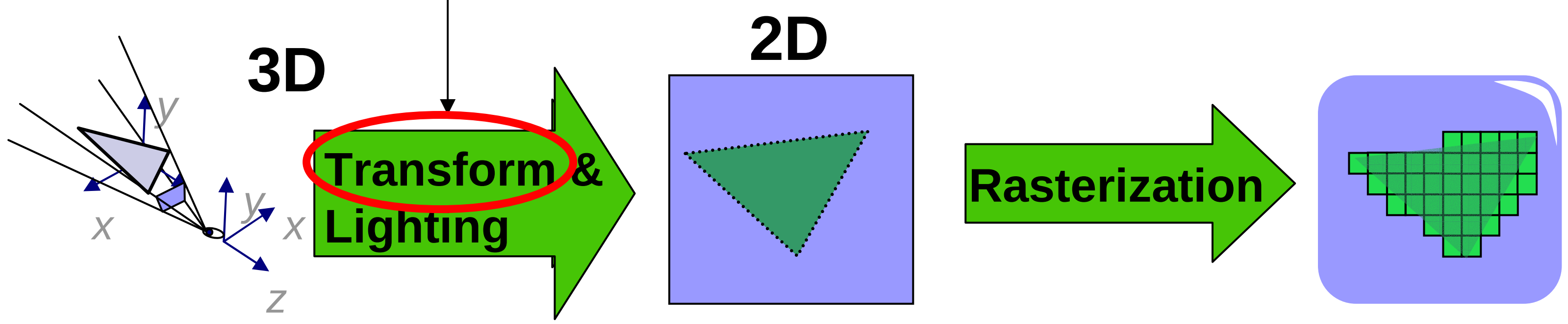
Grafica Computazionale

Sottosistema geometrico: trasformazioni

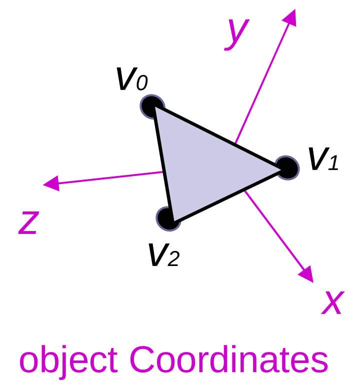
Fabio Ganovelli
fabio.ganovelli@gmail.com
a.a. 2006-2007

Outline

- Nella prima parte della pipeline tutte le primitive geometriche vengono trasformate dal sistema di riferimento in cui sono definite (object coordinates) allo spazio dello schermo (window coordinates).
- In questa lezione vedremo come ciò avviene



Il processo di trasformazione

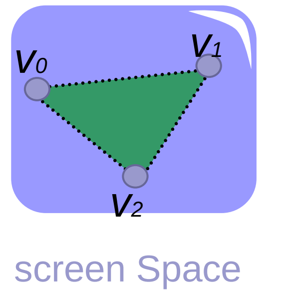


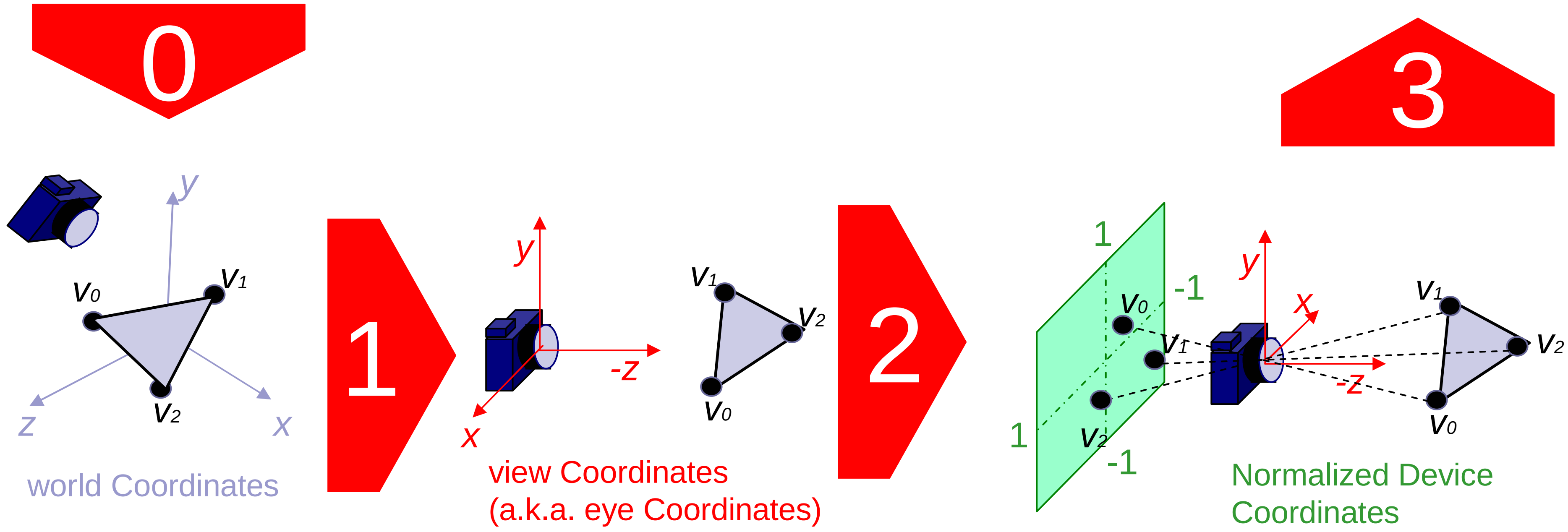
0) **transformazione di modellazione**

1) transformazione di vista

2) transformazione di proiezione

3) transformazione di viewport





Spazio Vettoriale

- Due entità:
  - Scalari (*a, b, c,* …)
  - Vettori (**T, U, V,** …).

- Operazioni:
  - Somma e moltiplicazione di scalari;
  - Somma vettore-vettore;
  - Moltiplicazione scalare-vettore.

Spazio affine

- Tre entità:
  - Scalari (*a, b, c,* …)
  - Vettori (**T, U, V,** …)
  - Punti (*P, Q, R,* …)

- Operazioni:
  - Le operazioni di uno spazio vettoriale,
  - Somma punto-vettore (restituisce un punto),
  - Sottrazione punto-punto (restituisce un vettore).

Coordinate omogenee

Punti

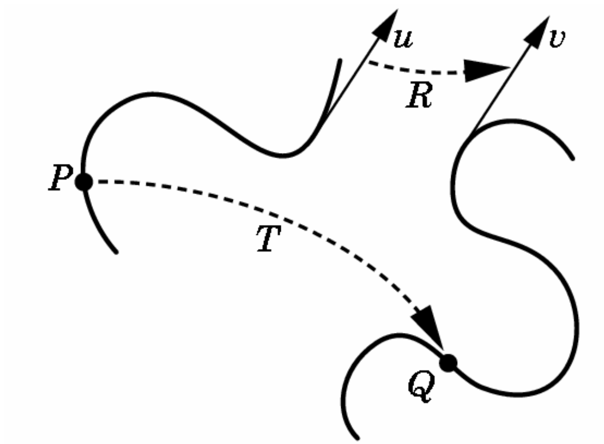
$$1 \Rightarrow \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vettori

$$0 \Rightarrow \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Trasformazioni **affini**

- Funzioni che mappano punti su punti e vettori su vettori



- Preservano
  - la *collinearità*
    - tutti i punti inizialmente su una linea giacciono ancora su di una linea dopo la trasformazione
  - i *rapporti* tra le distanze
    - il punto di mezzo di un segmento rimane il punto di mezzo di un segmento anche dopo la trasformazione.
- Si definiscono come una *funzione lineare:*

$$f(\alpha p + \beta q) = \alpha f(p) + \beta f(q)$$

Trasformazione di Traslazione

- Traslare una primitiva geometrica nel piano significa muovere ogni suo punto $P(x,y)$ di d_x unità lungo l'asse x e di d_y unità lungo l'asse y fino a raggiungere la nuova posizione $P'(x', y')$ dove:

- In notazione matriciale:

$$x' = x + d_x, \quad y' = y + d_y$$

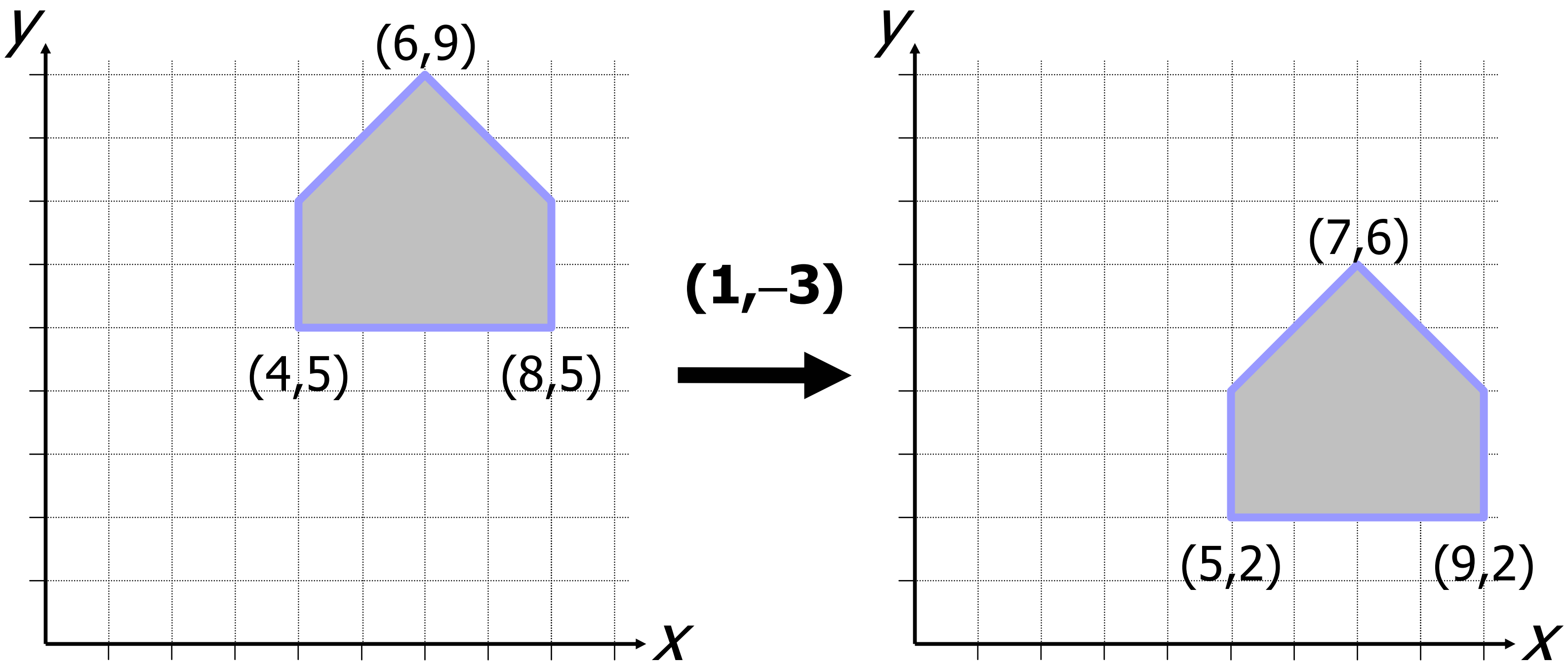
- Con

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \quad P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}; \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix};$$

$$P' = P + \mathbf{T}$$

Trasformazione di Traslazione

- Esempio di traslazione con vettore di traslazione **T**=(1,–3)



Trasformazione di Scalatura

- Scelto un punto C (punto fisso) di riferimento, scalare una primitiva geometrica significa riposizionare rispetto a C tutti i suoi punti in accordo ai fattori di scala s_x (lungo l'asse x) e s_y (lungo l'asse y) scelti.

- Se il punto fisso è l'origine O degli assi, la trasformazione di P in P' si ottiene con:

$$x' = s_x \cdot x, \quad y' = s_y \cdot y$$

Trasformazione di Scalatura

- In notazione matriciale:

$$P' = \mathbf{S} \cdot P$$

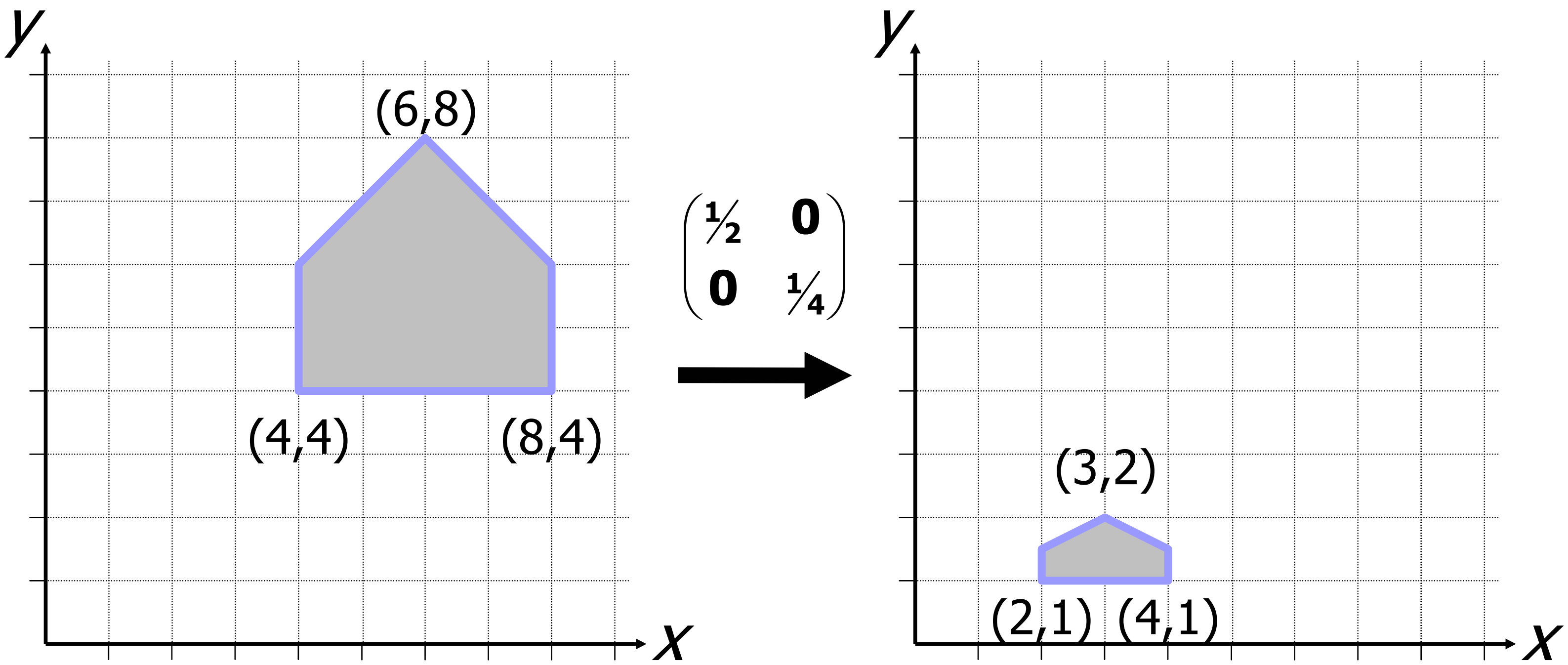
- dove

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \quad P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}; \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix}.$$

- $\mathbf{S}$ pre-moltiplica P in quanto P è definito come vettore colonna

Trasformazione di Scalatura

- Esempio di scalatura di ½ lungo l'asse x e di ¼ lungo l'asse y



Trasformazione di Scalatura

- Osservazioni:
  - Fattori di scala inferiori a 1 avvicinano l'oggetto al punto fisso di riferimento (origine);
  - Fattori di scala maggiori di 1 lo allontanano;
  - Se $s_x \neq s_y$ le proporzioni dell'oggetto non sono mantenute e si parla di *scalatura non uniforme;*
  - Se $s_x = s_y$ le proporzioni sono mantenute e si ha una *scalatura uniforme;*

Trasformazione di Rotazione

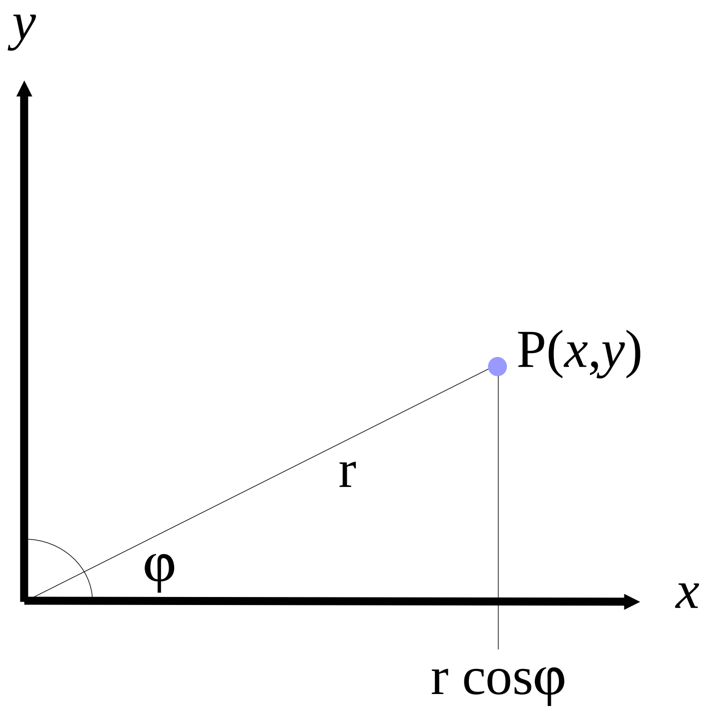
- Fissato un punto C (pivot) di riferimento ed un verso di rotazione (orario, antiorario), ruotare una primitiva geometrica attorno a C significa muovere tutti i suoi punti nel verso assegnato in maniera che si conservi, per ognuno di essi, la distanza da C;
- Una rotazione di θ attorno all'origine O degli assi è definita come:

$$x' = x \cdot \cos\theta - y \cdot \mathrm{sen}\,\theta, \quad y' = x \cdot \mathrm{sen}\,\theta + y \cdot \cos\theta$$

Trasformazione di Rotazione

- La relazione tra P' e P si ricava trigonometricamente;

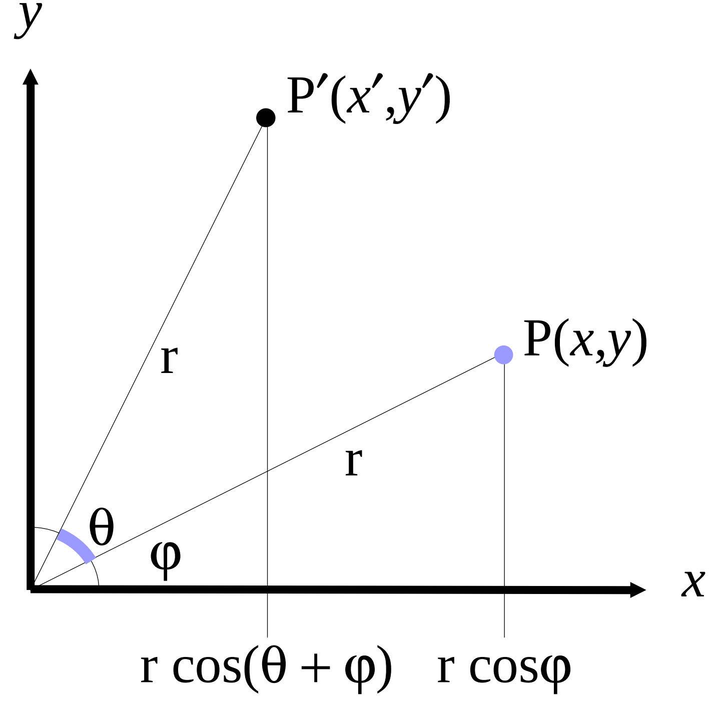
- Le coordinate di P possono essere espresse in coordinate polari:



$$x = r \cdot \cos\phi; \quad y = r \cdot \sin\phi.$$

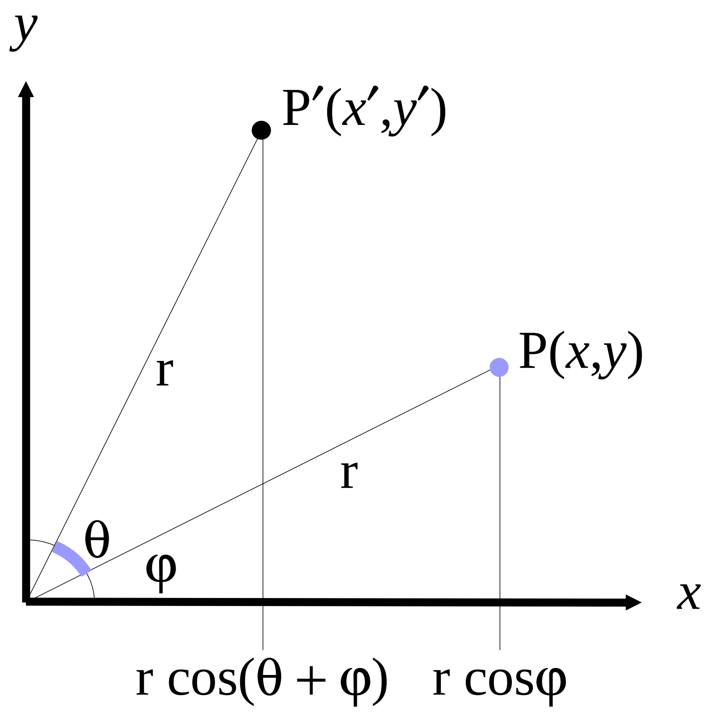
Trasformazione di Rotazione

$$\begin{aligned} x' &= r \cdot \cos(\theta + \phi) \\ &= r \cdot \cos\theta \cdot \cos\phi - r \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi \\ &= r \cdot \cos\theta \cdot \frac{x}{r} - r \cdot \sin\theta \cdot \frac{y}{r} \\ &= x \cdot \cos\theta - y \cdot \sin\theta; \end{aligned}$$



Trasformazione di Rotazione

$$
\begin{aligned}
y' &= r \cdot \sin(\theta + \phi) \\
&= r \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi + r \cdot \cos\theta \cdot \sin\phi \\
&= r \cdot \sin\theta \cdot \frac{x}{r} + r \cdot \cos\theta \cdot \frac{y}{r} \\
&= x \cdot \sin\theta + y \cdot \cos\theta.
\end{aligned}
$$



Trasformazione di Rotazione

- In notazione matriciale abbiamo:

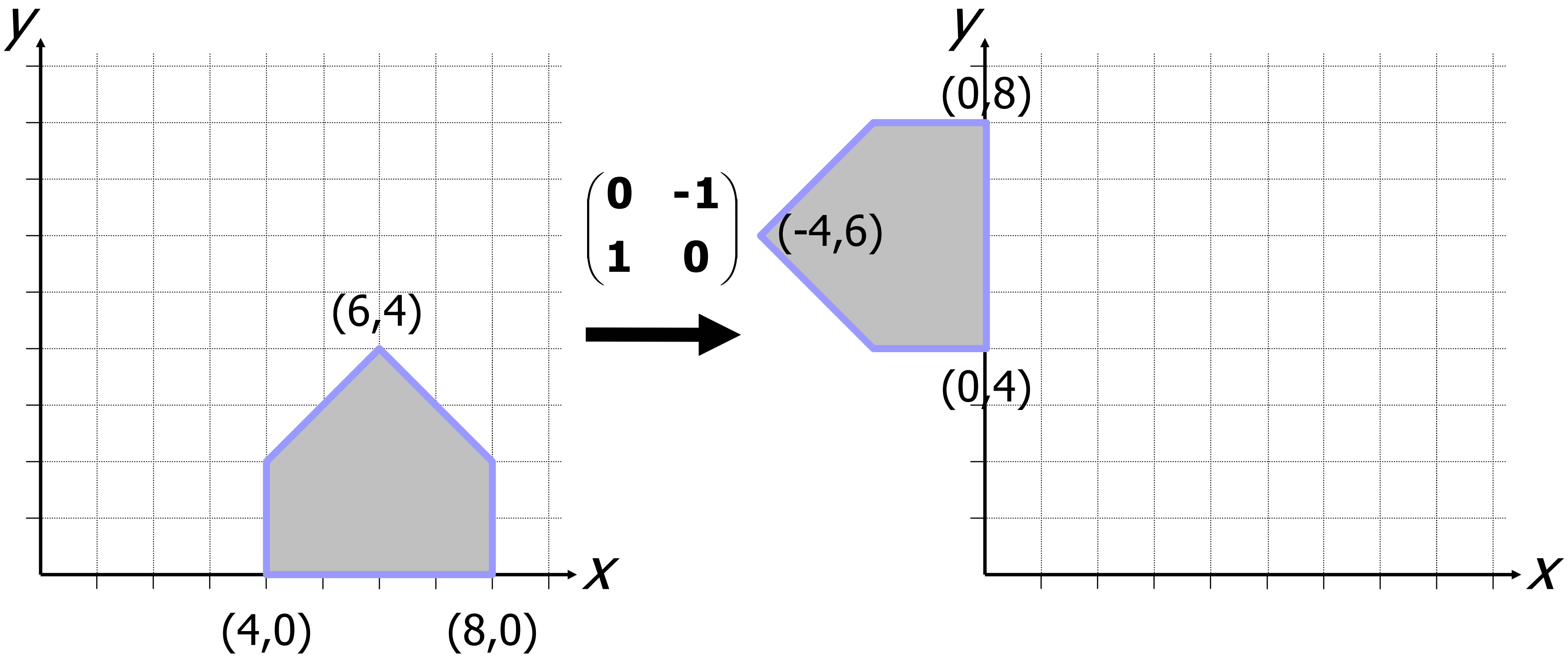
$$P' = \mathbf{R} \cdot P$$

- dove:

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \quad P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Trasformazione di Rotazione

- Esempio di rotazione di $\pi/2$ attorno all'origine



Trasformazione di Rotazione

- Osservazioni:
  - Gli angoli sono considerati positivi quando misurati in senso antiorario;
  - Per le rotazioni di angoli negativi (senso orario) si ricorre alle identità:

$$\cos(-\theta) = cos(\theta); \quad \sin(-\theta) = -sin(\theta).$$

Coordinate omogenee

- Le trasformazioni geometriche possono essere applicate in sequenza; la presenza di una *somma di vettori* (traslazione):

$$P' = P + \mathbf{T}$$

- e di *moltiplicazioni* (scalatura e rotazione):

$$P' = \mathbf{S} \cdot P$$

$$P' = \mathbf{R} \cdot P$$

- rende impraticabile la concatenazione di trasformazioni.

Coordinate omogenee

- Il punto P di coordinate (x,y) è rappresentato in coordinate omogenee come (x_h,y_h,w), dove:

$$x = x_h/w; \quad y = y_h/w; \quad \text{con} \quad w \neq 0.$$

- Due punti di coordinate (x, y, w) e (x', y', w') rappresentano lo stesso punto del piano se e solo se le coordinate di uno sono multiple delle corrispondenti coordinate dell’altro;
- Almeno uno dei valori x, y, o w deve essere diverso da 0;
- Quando $w = 1$ (forma canonica) coordinate cartesiane ed omogenee coincidono.
- Con $(x, y, w \neq 0)$ si rappresentano *punti*, con $(x, y, 0)$ si rappresentano*vettori.*

Trasformazioni affini

- Si esprimono nella forma matriciale

$$f\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \gamma_3\\ 1\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \gamma_3\\ 1\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}\delta_1\\ \delta_2\\ \delta_3\\ 1\end{pmatrix}$$

sempre

coordinate omogenee
punto di partenza

coordinate omogenee
punto di arrivo

Trasformazioni affini

- Nel caso dei vettori

conta solo questo

$$f\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \gamma_3\\ 0\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \gamma_3\\ 0\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}\delta_1\\ \delta_2\\ \delta_3\\ 0\end{pmatrix}$$

sempre

coordinate omogenee
vettore di partenza

coordinate omogenee
vettore di arrivo

Trasformazioni e coordinate omogenee

- Nella notazione in coordinate omogenee possiamo riscrivere le trasformazioni geometriche di base come:
- *Trasformazione di traslazione*:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Concatenazione di due traslazioni

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x1} \\ 0 & 1 & d_{y1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x2} \\ 0 & 1 & d_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x1} + d_{x2} \\ 0 & 1 & d_{y2} + d_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Trasformazioni e coordinate omogenee

- *Trasformazione di scalatura*:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- *Trasformazione di rotazione*:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Altre trasformazioni: riflessione

- Riflessione rispetto all'asse *x*:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Riflessione rispetto all'asse *y*:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Riflessione rispetto all'origine degli assi:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Altre trasformazioni: deformazione (shear)

- Deformazione rispetto all'asse *x*:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Deformazione rispetto all'asse *y*:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Riflessione rispetto entrambi gli assi:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Trasformazione di deformazione (shear)

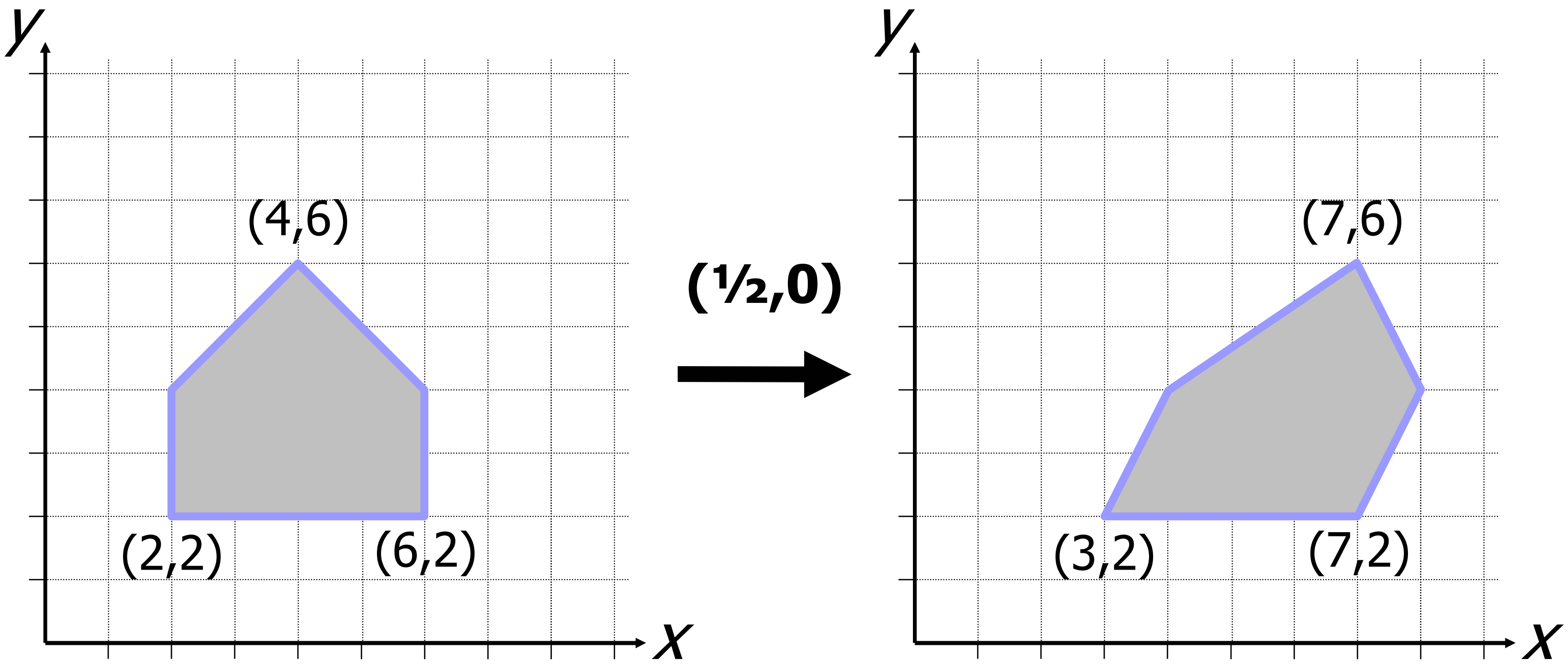
- Dalle relazioni:

$$x' = x + ay \quad y' = y + bx$$

risulta evidente come la deformazione lungo l'asse x sia linearmente dipendente dalla coordinata y e la deformazione in y sia strettamente correlata all'ascissa del punto.

Trasformazione di deformazione (shear)

- Esempio di deformazione con: $a=\frac{1}{2}$ e $b=0$



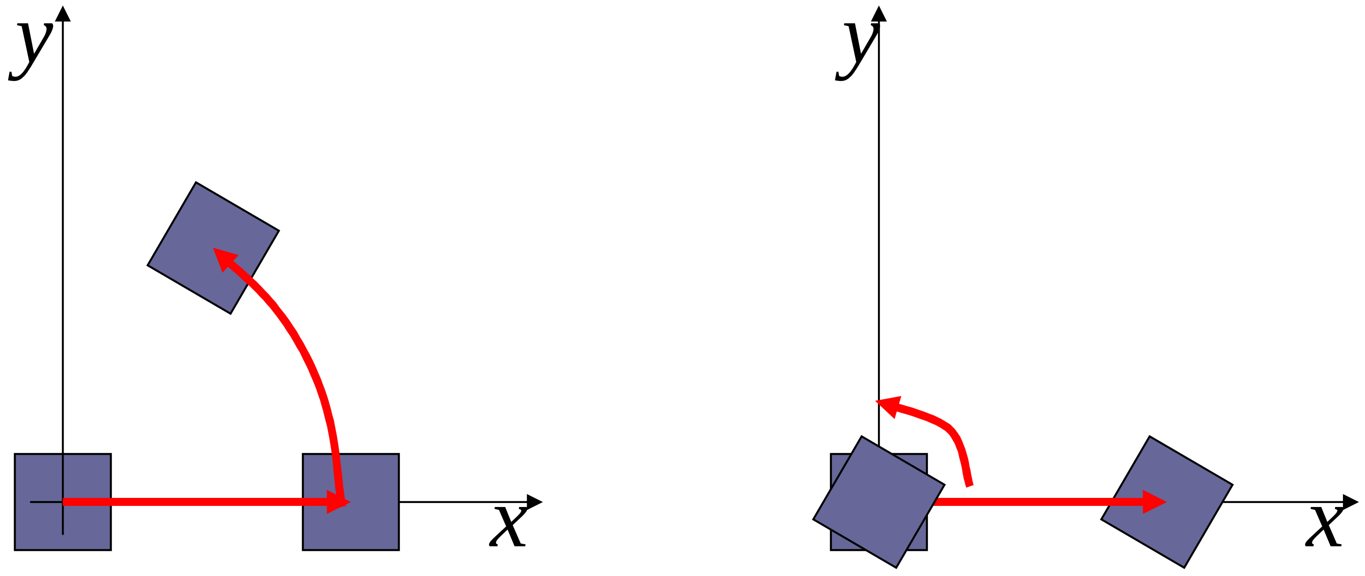
Composizione di trasformazioni

- La rappresentazione in coordinate omogenee permette la concatenazione di trasformazioni;
- L'ordina di concatenazione è importante perché le trasformazioni geometriche sono associative ma non sono (**di solito**) commutative;
- La corretta sequenza delle trasformazioni $\mathbf{T_1}$, $\mathbf{T_2}$, $\mathbf{T_3}$ e $\mathbf{T_4}$ si ottiene componendo $\mathbf{T}$ come:

$$\mathbf{T = T_4 \cdot T_3 \cdot T_2 \cdot T_1}$$

Composizione di trasformazioni

- Non commutatività della composizione di trasformazioni: traslazione seguita da rotazione attorno all'origine (sinistra) e rotazione intorno all'origine seguita da traslazione (destra).



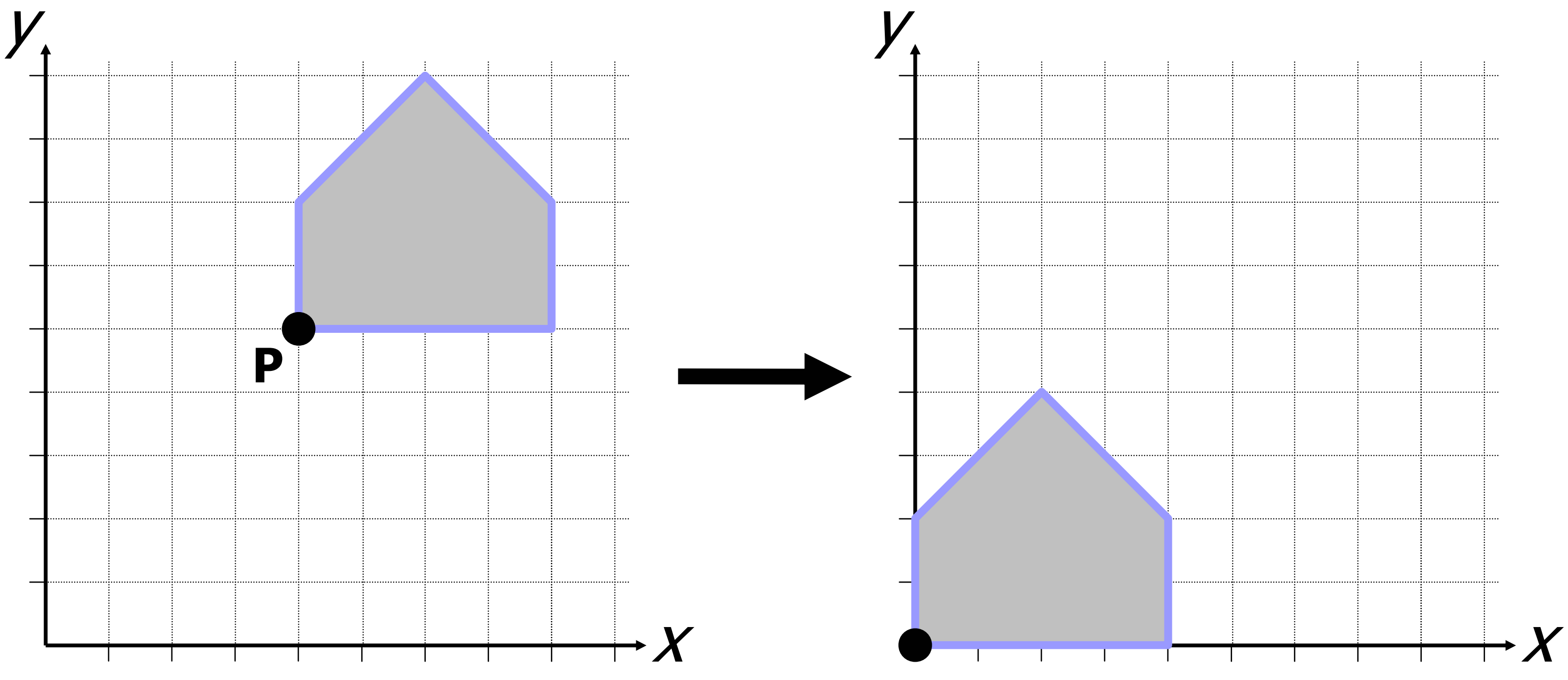
Composizione di trasformazioni

- Rotazione oraria di un angolo θ attorno ad un punto P generico:
  - Traslazione che muove P nell'origine degli assi;
  - Rotazione attorno all'origine;
  - Traslazione opposta alla precedente che riporta P nella sua posizione originale.

$$\mathbf{R}_{\mathrm{g}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathrm{P}_x \\ 0 & 1 & \mathrm{P}_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\,\theta & 0 \\ sen\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\mathrm{P}_x \\ 0 & 1 & -\mathrm{P}_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

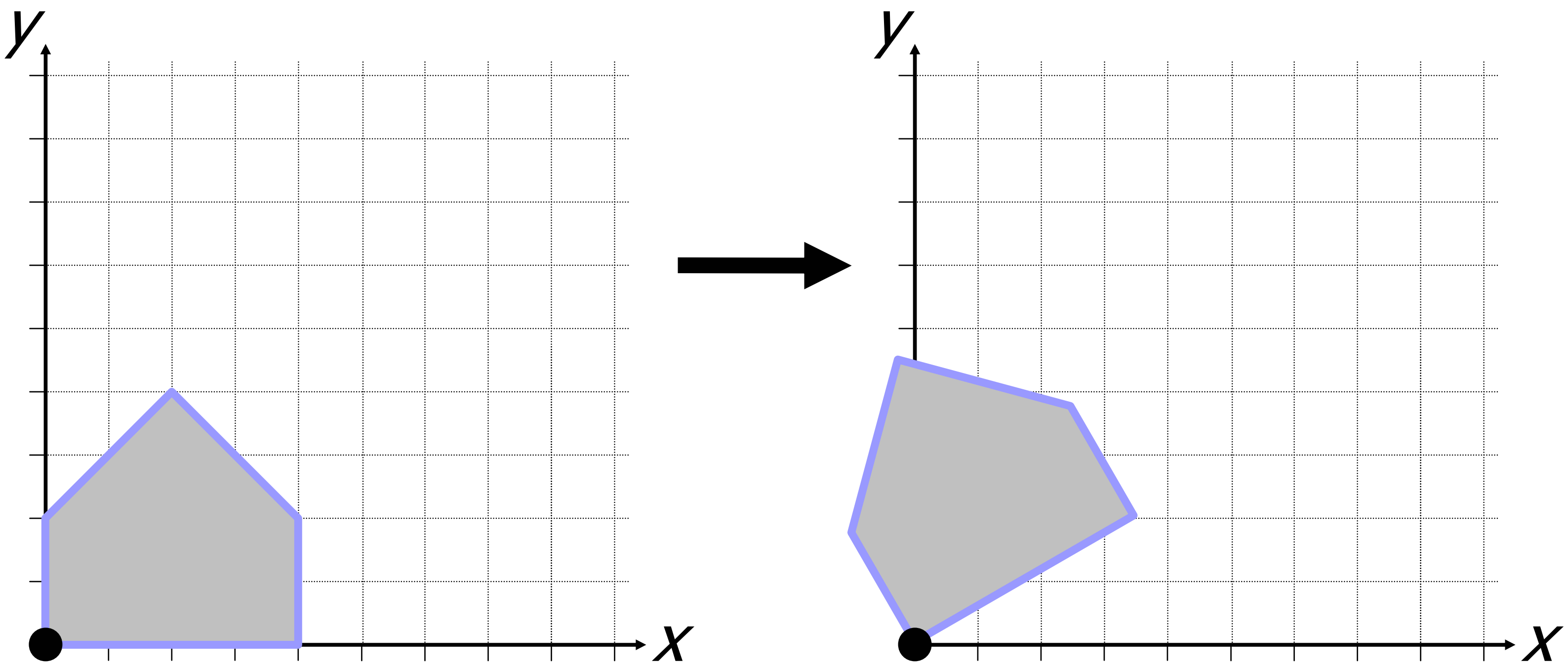
Composizione di trasformazioni

- Rotazione θ attorno ad un punto P.
  - *Passo 1:* Traslazione di P nell'origine degli assi



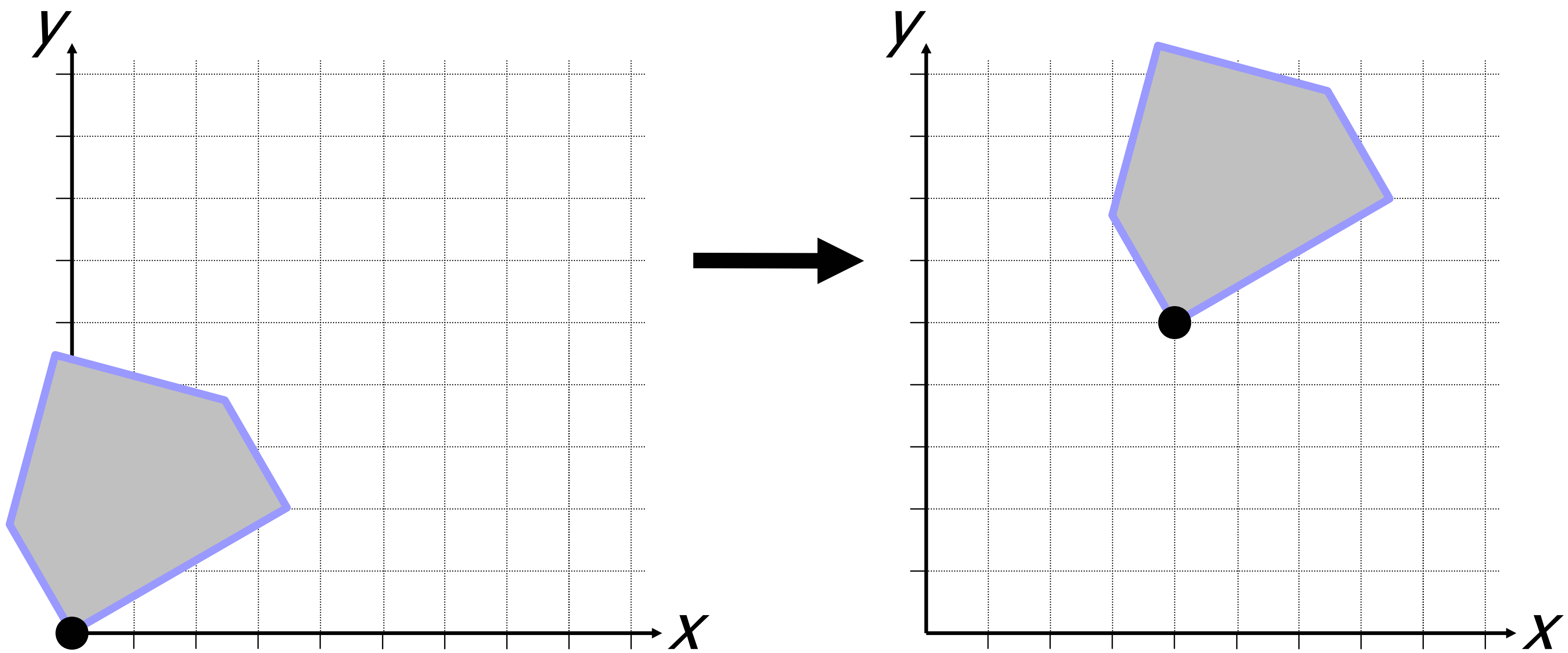
Composizione di trasformazioni

- Rotazione θ attorno ad un punto P.
  - *Passo 2:* Rotazione attorno all'origine ($\theta = \pi/6$)



Composizione di trasformazioni

- Rotazione θ attorno ad un punto *P*.
  - *Passo 3:* Traslazione opposta alla precedente



Composizione di trasformazioni

- Trasformazione di scalatura attorno ad un punto P generico:
  - Traslazione che muove P nell'origine degli assi;
  - Trasformazione di scala attorno all'origine;
  - Traslazione opposta alla precedente che riporta P nella sua posizione originale.

$$\mathbf{R}_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & P_x \\ 0 & 1 & P_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -P_x \\ 0 & 1 & -P_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esempi di trasformazioni affini:

Scalatura (scaling)

$$f(p) = k\,p \longrightarrow$$

$$f(\alpha\, p + \beta\, q) =$$

$$k\left[\alpha\, p + \beta\, q\right] =$$

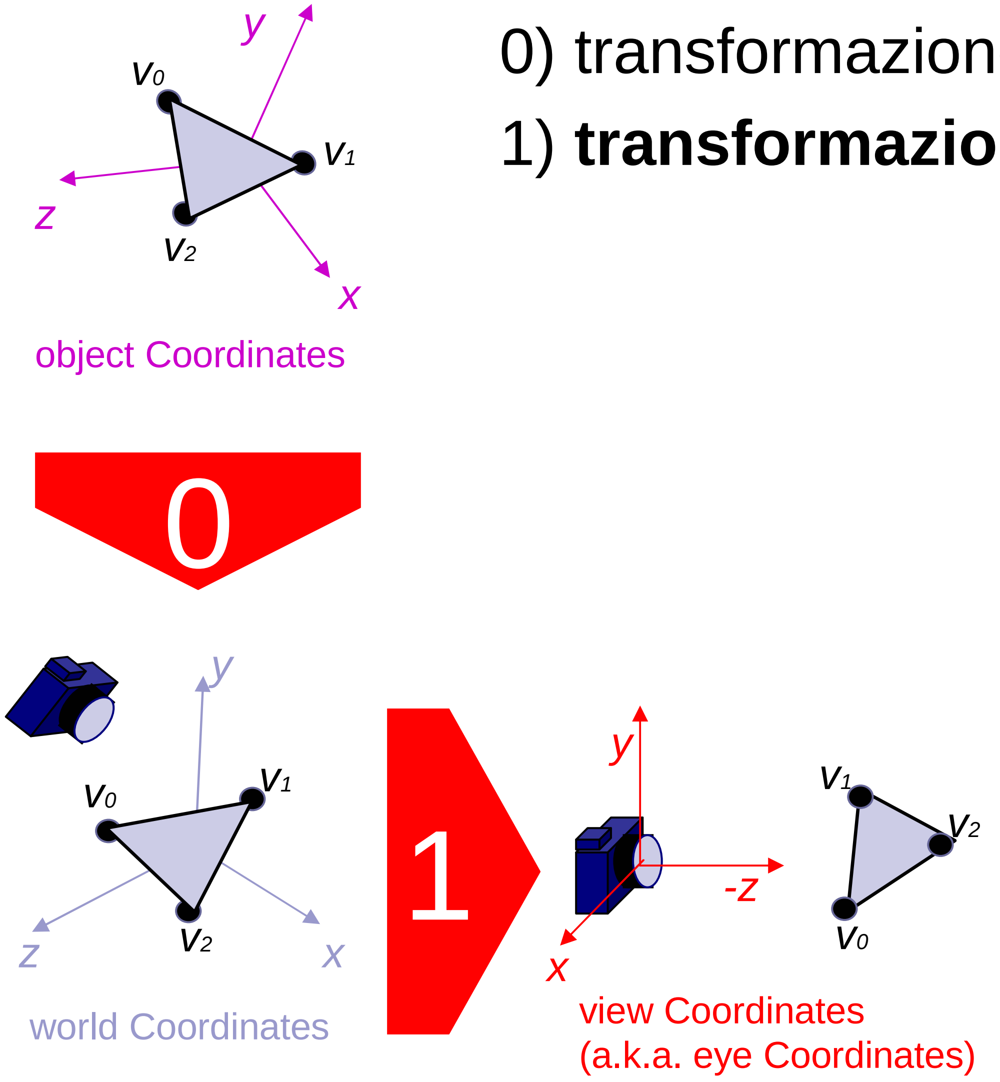
$$\alpha\, k\, p + \beta\, k\, q =$$

$$\alpha\, f(p) + \beta\, f(q)$$

Trasformazioni di vista

0) transformazione di modellazione

1) **transformazione di vista**



Sistema di riferimento (*frame*)

- Definito da
  - un punto base (origine) p_0
  - e una base vettoriale $\overbrace{\{ v_0 , v_1 , v_2 \}}^{\text{lin indip}}$
- Posso esprimere (univocamente) ogni **punto** p come:

$$p = v_0\, \eta_0 + v_1\, \eta_1 + v_2\, \eta_2 + p_0$$

- cioè:

$$p = \underbrace{[\ \eta_0\ ,\ \eta_1\ ,\ \eta_2\ ,\ 1]}_{\text{coordinate omogenee di } p} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ p_0 \end{bmatrix}$$

Sistema di riferimento (*frame*)

- Definito da
  - un punto base (origine) p_0
  - e una base vettoriale { v_0 , v_1 , v_2 }

- Posso esprimere (univocamente) ogni **vettore** *v* come:

$$v = v_0\,\eta_0 + v_1\,\eta_1 + v_2\,\eta_2 + \cancel{p_0}$$

- cioè:

$$v = \underbrace{[\ \eta_0\ ,\ \eta_1\ ,\ \eta_2\ ,\ 0]}_{\text{coordinate omogenee di } v} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ p_0 \end{bmatrix}$$

Cambio di frame

- Dati due sistemi di riferimento: $\{v_1, v_2, v_3, o\}$ $\{u_1, u_2, u_3, q\}$

$$p = [a_1, a_2, a_3, 1] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ o \end{bmatrix} = [b_1, b_2, b_3, 1] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ q \end{bmatrix}$$

coordinate di p nel primo sist. di rif.:

coordinate di p nel sec. sist. di rif.:

- Esprimo uno in termini dell'altro:

$$u_1 = \gamma_{11} v_1 + \gamma_{12} v_2 + \gamma_{13} v_3$$
$$u_2 = \gamma_{21} v_1 + \gamma_{22} v_2 + \gamma_{23} v_3$$
$$u_3 = \gamma_{31} v_1 + \gamma_{32} v_2 + \gamma_{33} v_3$$
$$o = \gamma_{41} v_1 + \gamma_{42} v_2 + \gamma_{43} v_3 + p$$

matrice di cambio di frame

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{21} & \gamma_{31} & \gamma_{41} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} & \gamma_{32} & \gamma_{42} \\ \gamma_{13} & \gamma_{23} & \gamma_{33} & \gamma_{43} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cambio di frame (nel frame canonico)

- Dati due sistemi di riferimento: $\{v_1, v_2, v_3, o\}$ $\{u_1, u_2, u_3, q\}$

$$p = [a_1, a_2, a_3, 1]\begin{bmatrix} 1,0,0,0 \\ 0,1,0,0 \\ 0,0,1,0 \\ 0,0,0,1 \end{bmatrix} = [b_1, b_2, b_3, 1]\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ q \end{bmatrix}$$

coordinate di p
nel primo sist. di rif.:

coordinate di p
nel sec. sist. di rif.:

- Esprimo uno in termini dell'altro:

$$u_1 = u_{1x} I_x + u_{1y} I_y + u_{1z} I_z + 0 I_w$$

$$u_2 = u_{2x} I_x + u_{2y} I_y + u_{2z} I_z + 0 I_w$$

$$u_3 = u_{3x} I_x + u_{3y} I_y + u_{3z} I_z + 0 I_w$$

$$q = 0 I_x + 0 I_y + 0 I_z + q I_w$$

matrice di cambio
di frame

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1x} & u_{2x} & u_{3x} & q_x \\ u_{1y} & u_{2y} & u_{3y} & q_y \\ u_{1z} & u_{2z} & u_{3z} & q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Frames con basi ortonormali

- In grafica si lavora quasi sempre con frames con assi ortonormali

$$\begin{bmatrix} u & 0 \\ v & 0 \\ z & 0 \\ q & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} \|u\| = \|v\| = \|z\| = 1 \\ u \cdot v = u \cdot z = v \cdot z = 0 \end{matrix}$$

- Grosso vantaggio: l'inversa è banale

$$\begin{bmatrix} R & 0 \\ q & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & 0 \\ -qR^T & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} p = a^T F_0 = b^T F_1 \\ a^T = b^T F_0 \; F_1^{-1} \end{matrix}$$

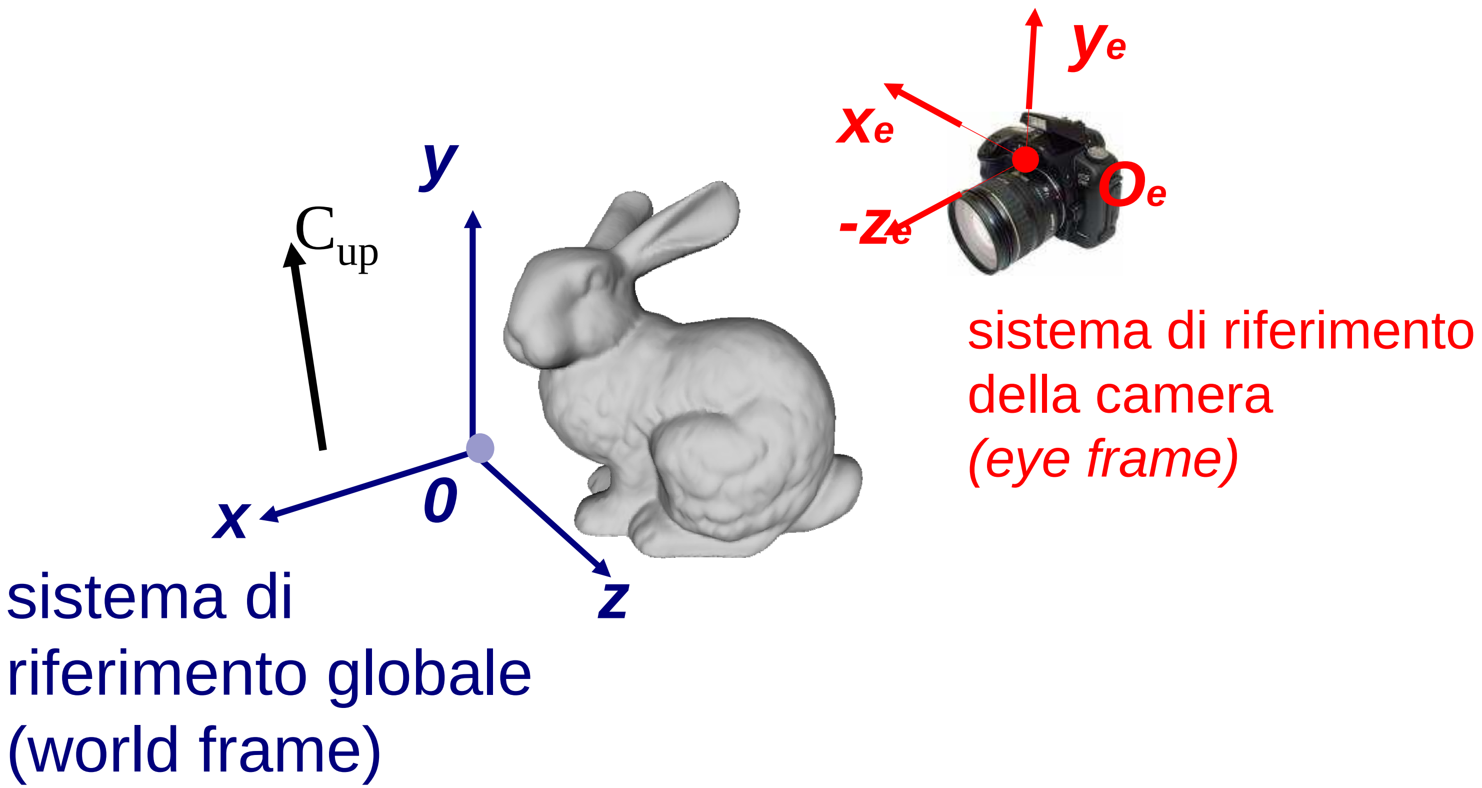
Cambio di frame

- In realtà tutte le transf. affini lineari si possono vedere come un *cambio di frame*
  - comprese quelle viste:
    - traslazione
    - scaling (uniforme o no)
    - shearing
    - Rotazioni
- La trasformazione che che porta le coordinate di un punto (o vettore) dal frame A al frame B è la stessa che trasforma il frame B nel frame A

Costruire un frame di vista

- Input:
  1) camera position C_{pos}
  2) direzione di vista C_{dir}
  3) vettore di alto C_{up}

- Output:
  Matrice di Trasformazione
  world frame ⟶ *eye frame*



Ripasso: prodotto scalare e vettoriale

- Prodotto Scalare ("dot-product", "internal product"):

vettore x vettore → scalare

$$(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z) \cdot (\beta_x, \beta_y, \beta_z) = \alpha_x \beta_x + \alpha_y \beta_y + \alpha_z \beta_z$$

Proprietà

commuta	$u \cdot v = v \cdot u$
lineare 1/2	$(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$
lineare 2/2	$(\alpha u) \cdot v = u \cdot (\alpha v) = \alpha(u \cdot v)$

Ripasso: prodotto scalare e vettoriale

- Prodotto Scalare ("dot-product", "internal product"):

  vettore x vettore → scalare

$$(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z) \cdot (\beta_x, \beta_y, \beta_z) = \alpha_x \beta_x + \alpha_y \beta_y + \alpha_z \beta_z$$

Proprietà

per il modulo: $|v| = \sqrt{v \cdot v}$

quindi, per calcolare una distanza tra punti: $|P - Q| = \sqrt{(P - Q) \cdot (P - Q)}$

e anche: $v \cdot v = 0 \Leftrightarrow v = (0,0,0)$

Ripasso: prodotto scalare e vettoriale

- Prodotto Scalare ("dot-product", "internal product"):

  vettore x vettore → scalare

$$(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z) \cdot (\beta_x, \beta_y, \beta_z) = \alpha_x \beta_x + \alpha_y \beta_y + \alpha_z \beta_z$$

Proprietà

molto utilmente: $u \cdot v = |u||v| \cos\theta$

quindi se u e v non sono nulli: $u \cdot v = 0 \Leftrightarrow u$ e v ortogonali

e, se u e v sono normalizzati: $u \cdot v = \cos\theta$

Ripasso: prodotto scalare e vettoriale

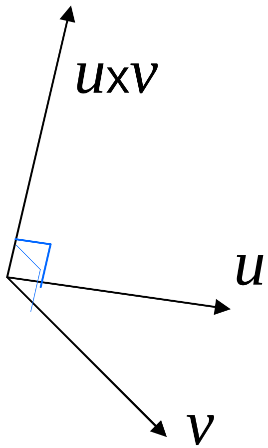
- Prodotto Vettoriale ("cross-product", "external product"):

vettore x vettore → vettore

$$(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z) \times (\beta_x, \beta_y, \beta_z) = \begin{bmatrix} \alpha_y \beta_z - \alpha_z \beta_y \\ \alpha_z \beta_x - \alpha_x \beta_z \\ \alpha_x \beta_y - \alpha_y \beta_x \end{bmatrix}$$

Proprietà

non commuta: $u \times v = -(v \times u)$



il risultato è ortogonale ad entrambi gli operandi: $(u \times v) \cdot v = (u \times v) \cdot u = 0$

Ripasso: prodotto scalare e vettoriale

- Prodotto Vettoriale ("cross-product", "external product"):

vettore x vettore → vettore

$$(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z) \times (\beta_x, \beta_y, \beta_z) = \begin{bmatrix} \alpha_y \beta_z - \alpha_z \beta_y \\ \alpha_z \beta_x - \alpha_x \beta_z \\ \alpha_x \beta_y - \alpha_y \beta_x \end{bmatrix}$$

Proprietà

molto utilmente: $|u \times v| = |u||v| \operatorname{sen} \theta$

quindi se u e v
non sono nulli: $|u \times v| = 0 \Leftrightarrow u$ e v allineati

e, se u e v
sono normalizzati: $|u \times v| = \operatorname{sen} \theta$

Costruire un frame di vista

- Input:

  1) camera position (punto) C_{pos}

  2) direzione di vista (vettore) C_{dir}

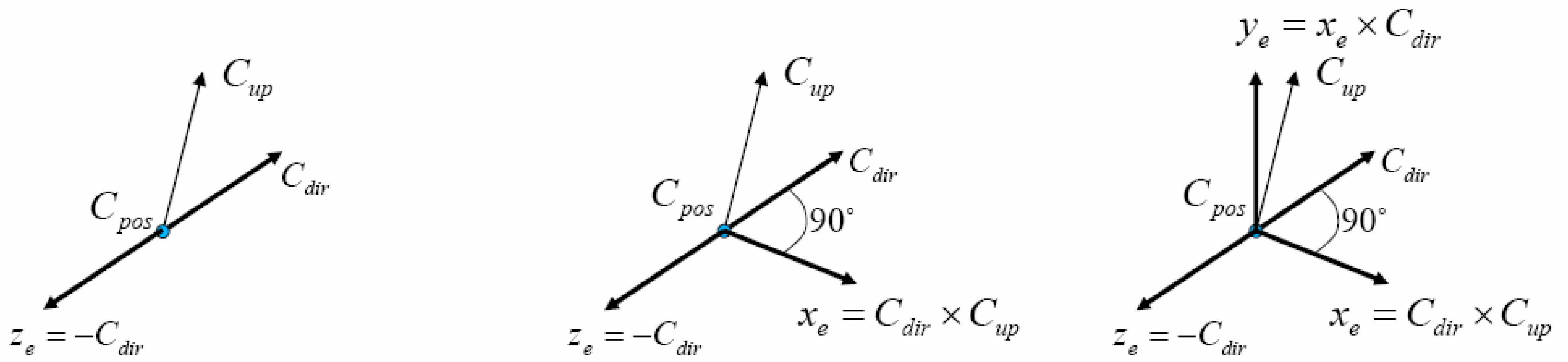
  3) vettore di alto (vettore) C_{up}

- Output:

  Matrice di Trasformazione

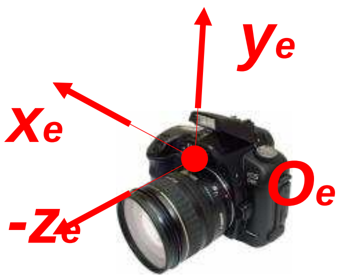
  world frame $\longrightarrow$ *eye frame*

- Per comodita' dell'utente, non si richiede la specifica del frame della camera
- Solo il **punto di vista**, la **direzione di vista** il **vettore di alto**
- Per la stessa ragione non si richiede che il vettore di alto sia perpendicolare alla direzione

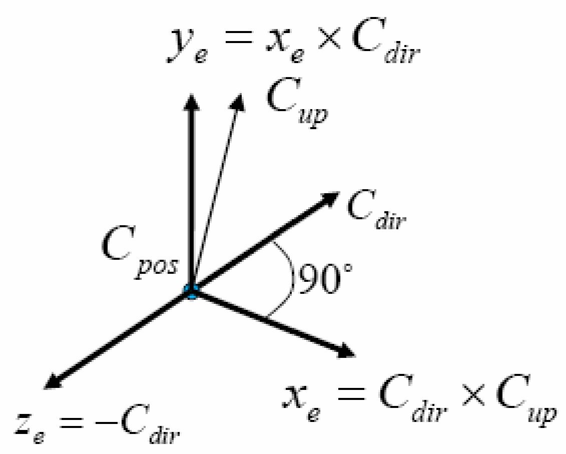


Costuire un frame di vista

$$M_{eye} = \begin{bmatrix} C_{dir} \times C_{up} & 0 \\ (C_{dir} \times C_{up}) \times C_{dir} & 0 \\ -C_{dir} & 0 \\ C_{pos} & 1 \end{bmatrix}$$



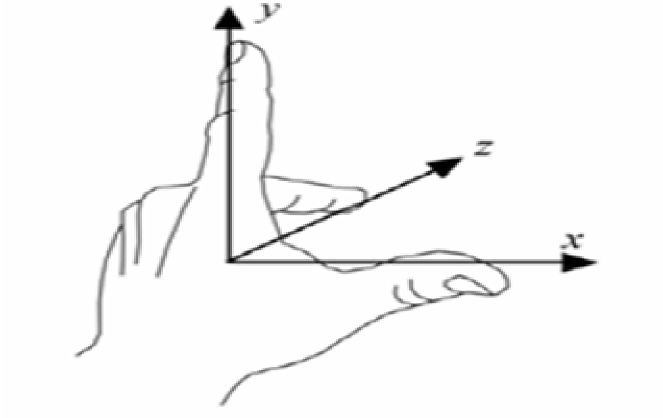
sistema di riferimento
della camera
(eye frame)



Funziona sempre?...

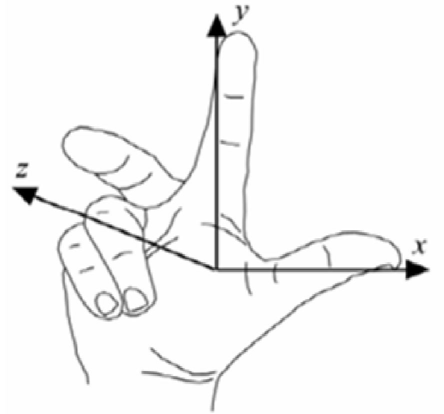
Frame sinistrorso e detrorso

- Un sistema di riferimento può essere sinistrorso o destrorso



sinistrorso

$$x \times y = -z$$

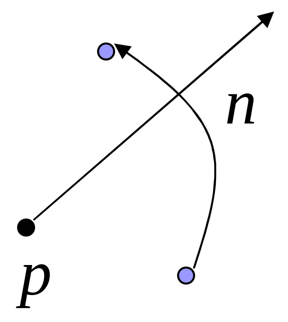


destrorso

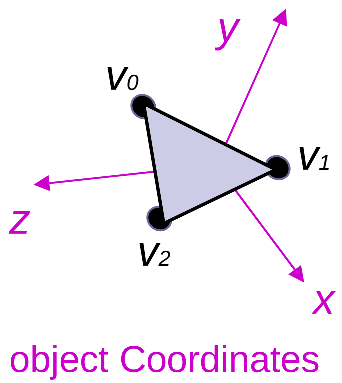
$$x \times y = z$$

Problema

- Dato un asse definito da un punto p e una direzione n, calcolare la trasformazione di rotazione di alfa gradi intorno all'asse
  - Hint1: sappiamo già fare la rotazione attorno agli assi principali
  - Hint2: se n fosse un asse principale sarebbe facile



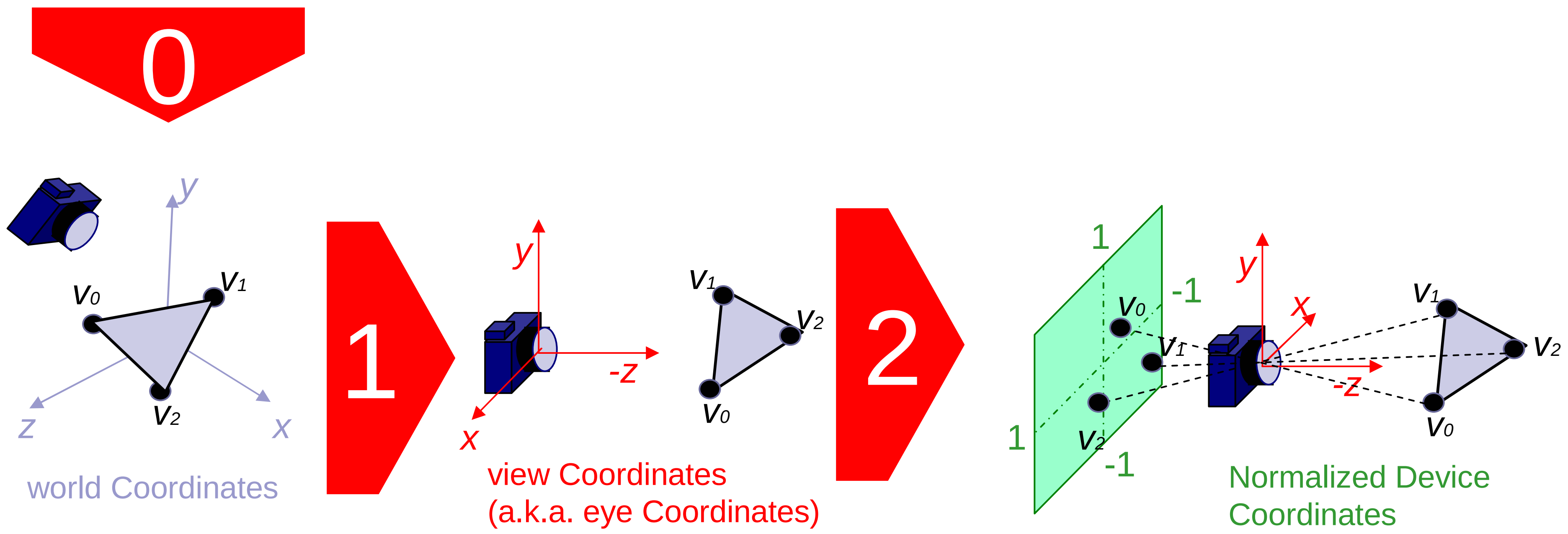
Il processo di trasformazione



0) transformazione di modellazione

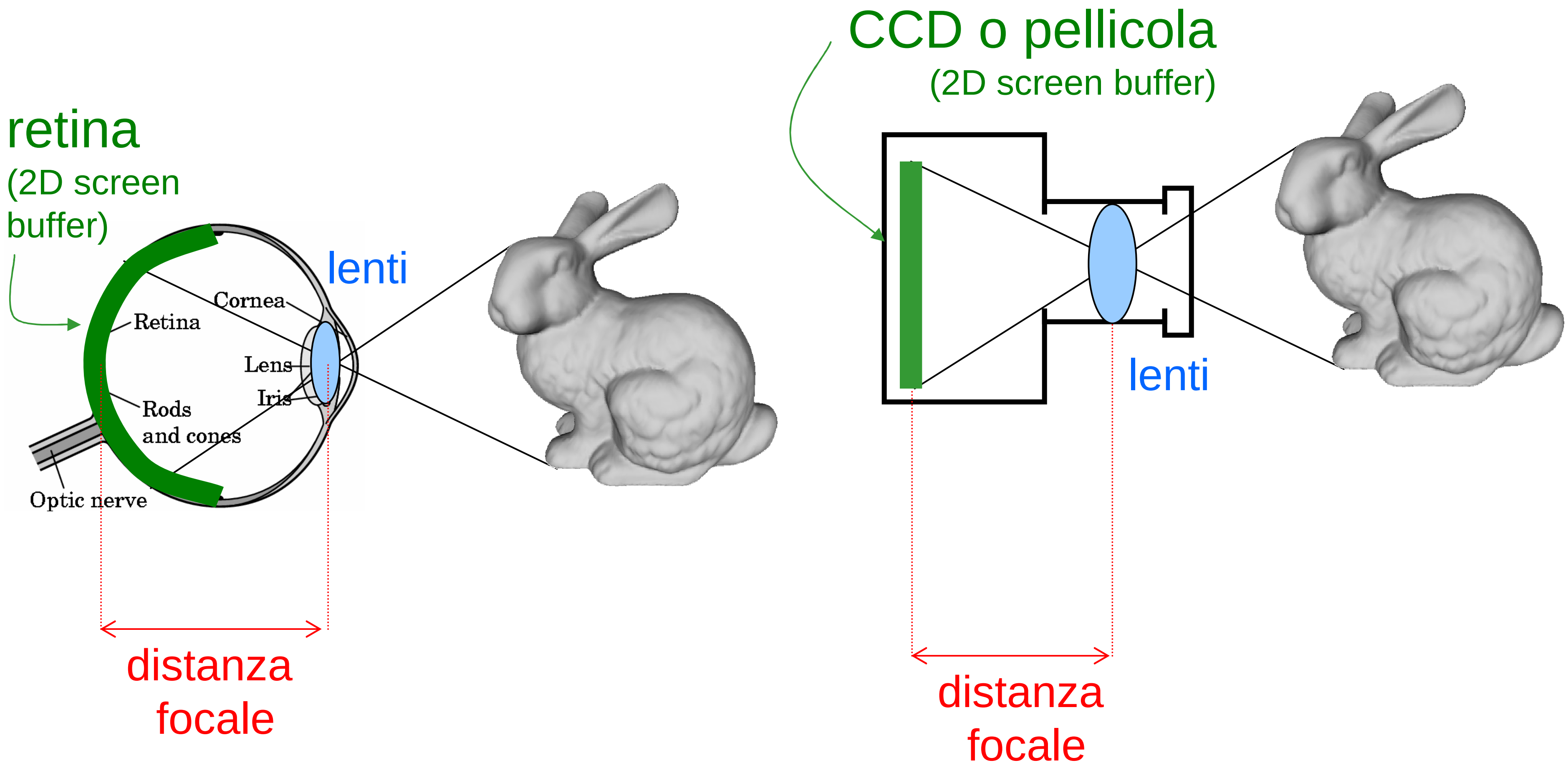
1) transformazione di vista

2) **transformazione di proiezione**

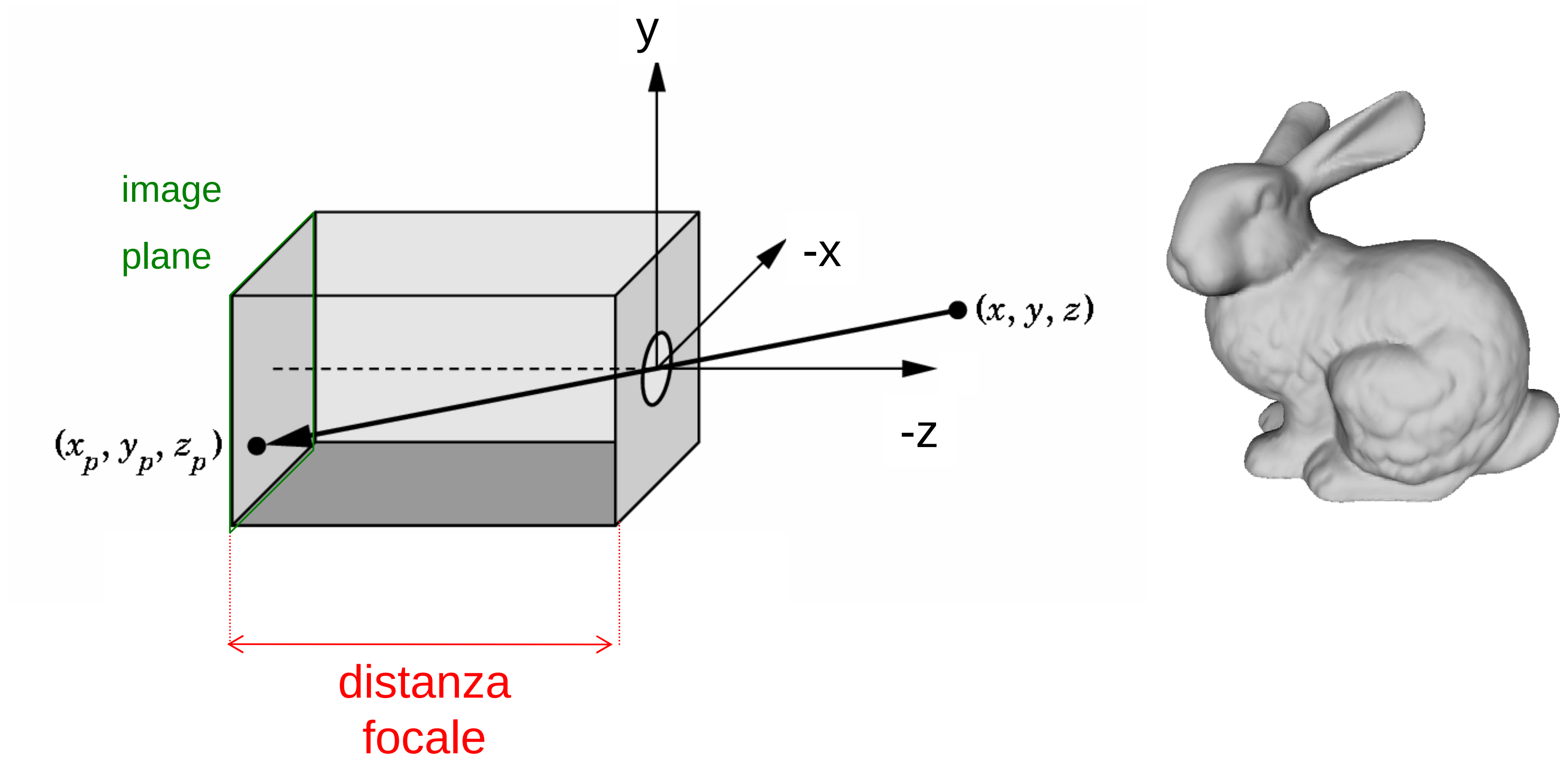


Come si svolge fisicamente il processo:

- Occhio o macchina fotografica
  il concetto è lo stesso:

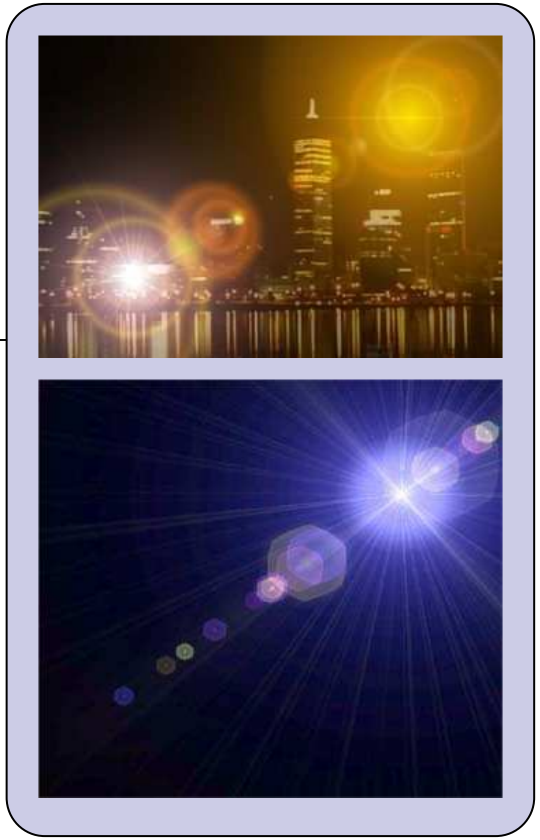


Modello semplificato



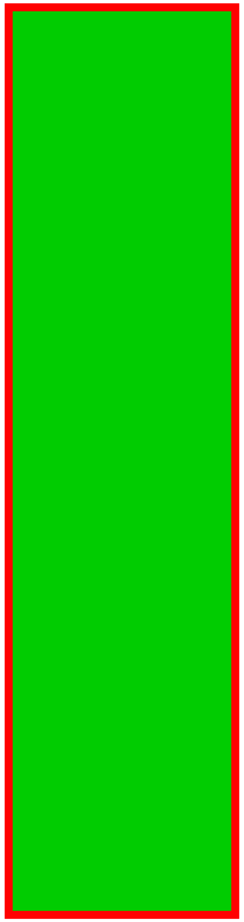
Niente lenti

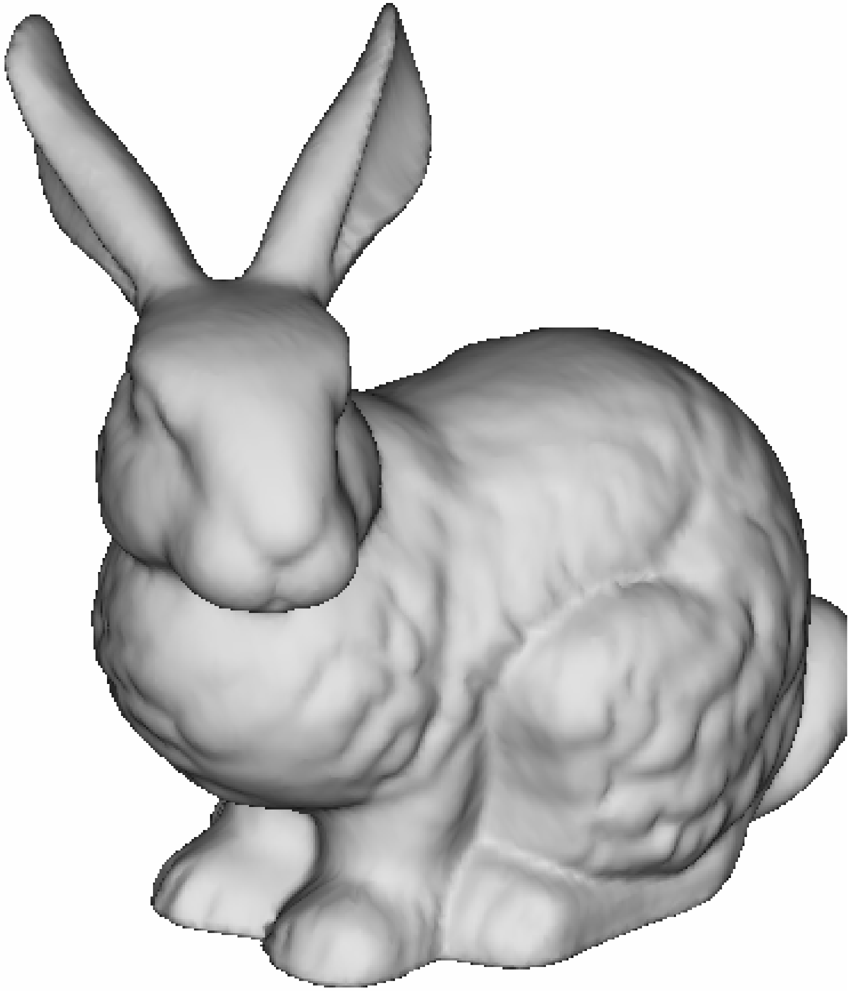
- le lenti servivano a "simulare" una pin-hole camera
- non modellandole,
  ci siamo giocati (per ora)
  i "difetti" di questa simulazione:
    - range di fuoco finito
    - flares
    - distorsioni radiali



La proiezione prospettica

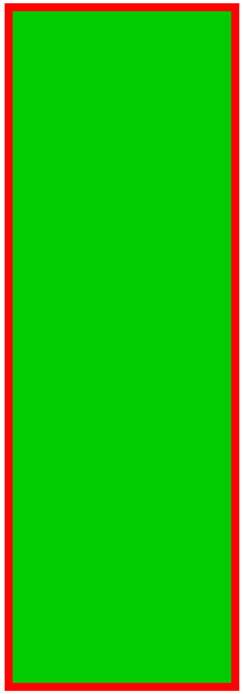
- Al variare della distanza focale (d)

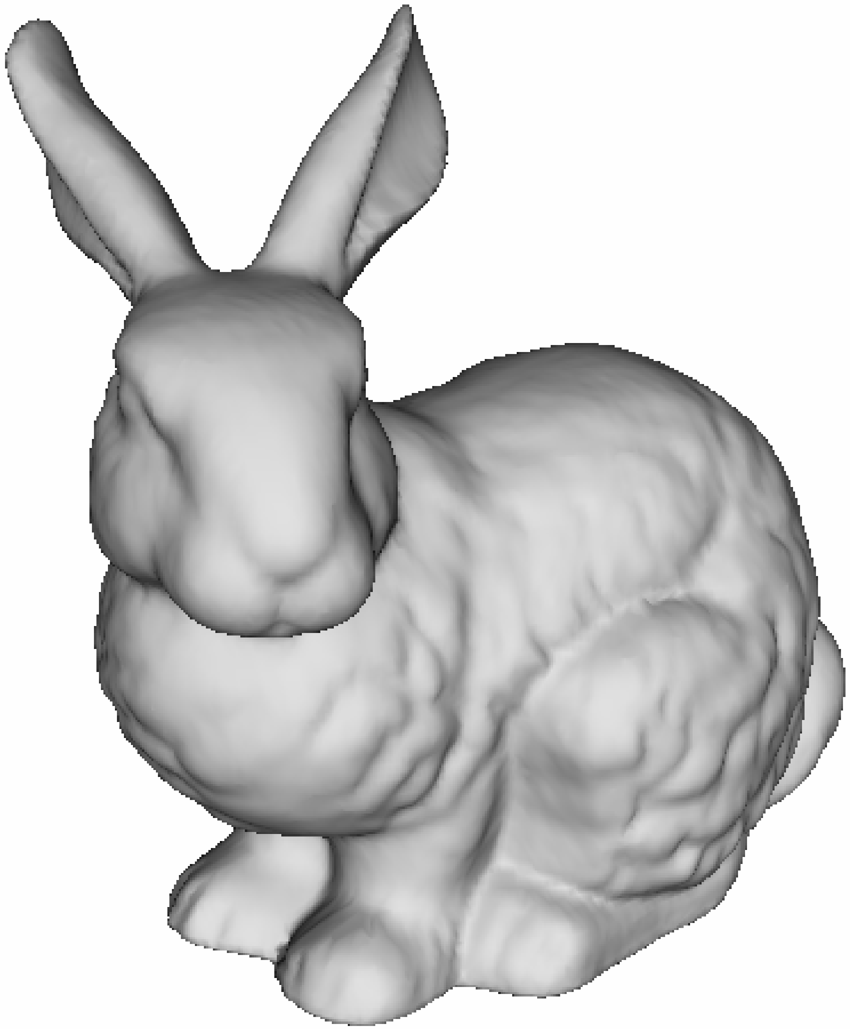




La proiezione prospettica

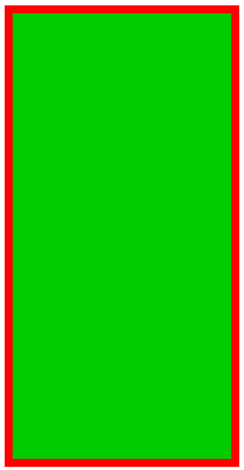
- Al variare della distanza focale (d)

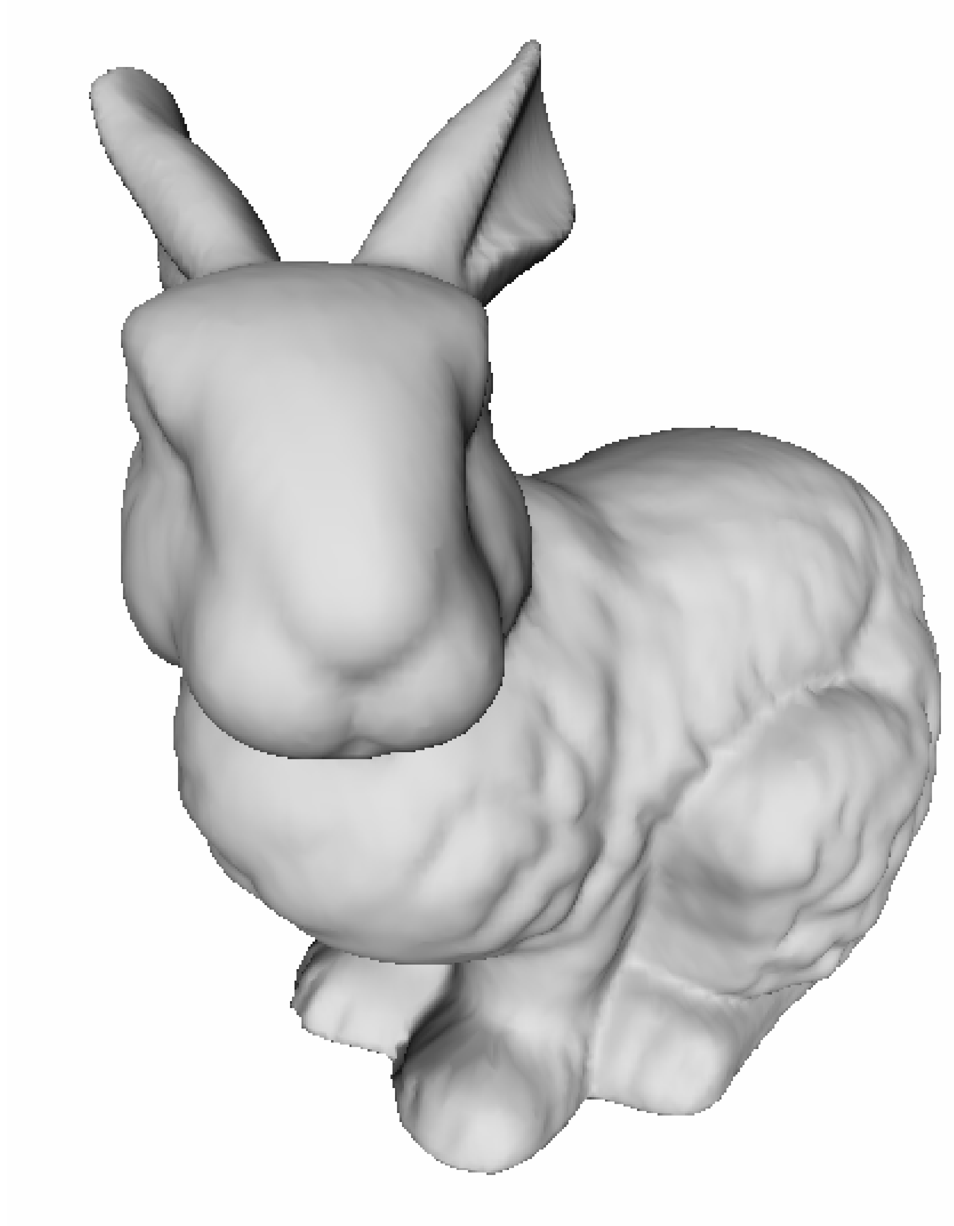




La proiezione prospettica

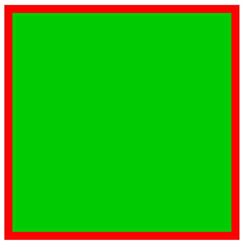
- Al variare della distanza focale (d)

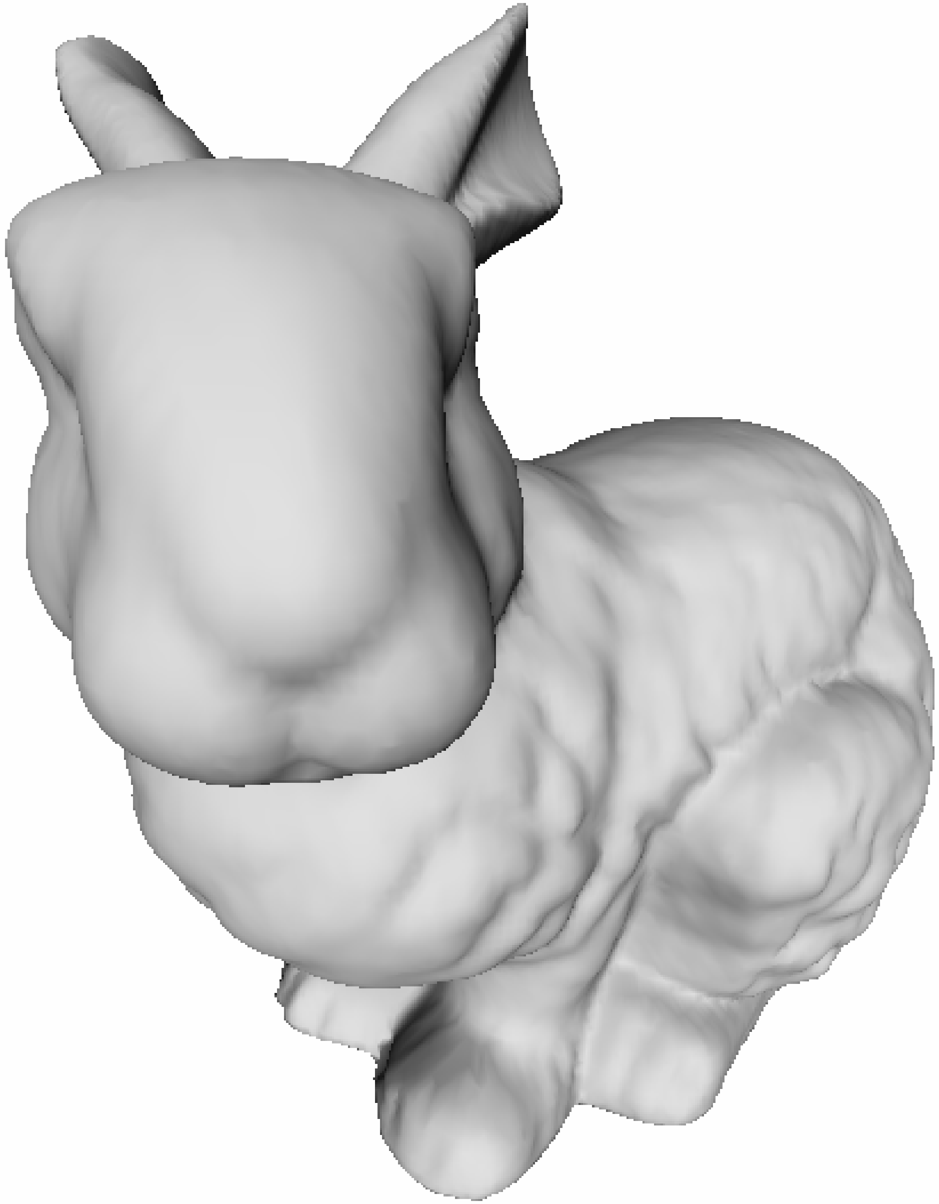




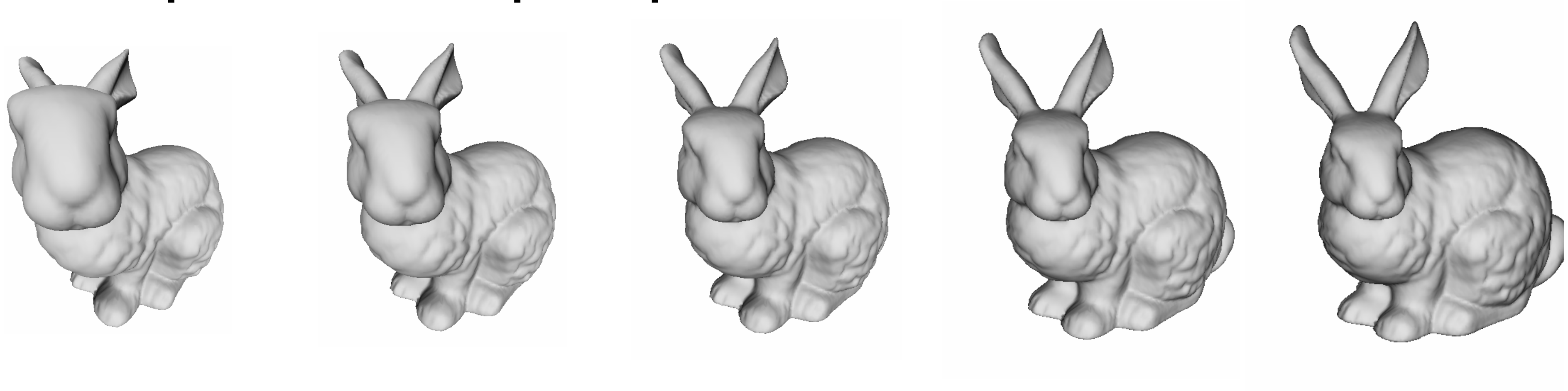
La proiezione prospettica

- Al variare della distanza focale (*d*)





La proiezione prospettica



d piccolo

d grande

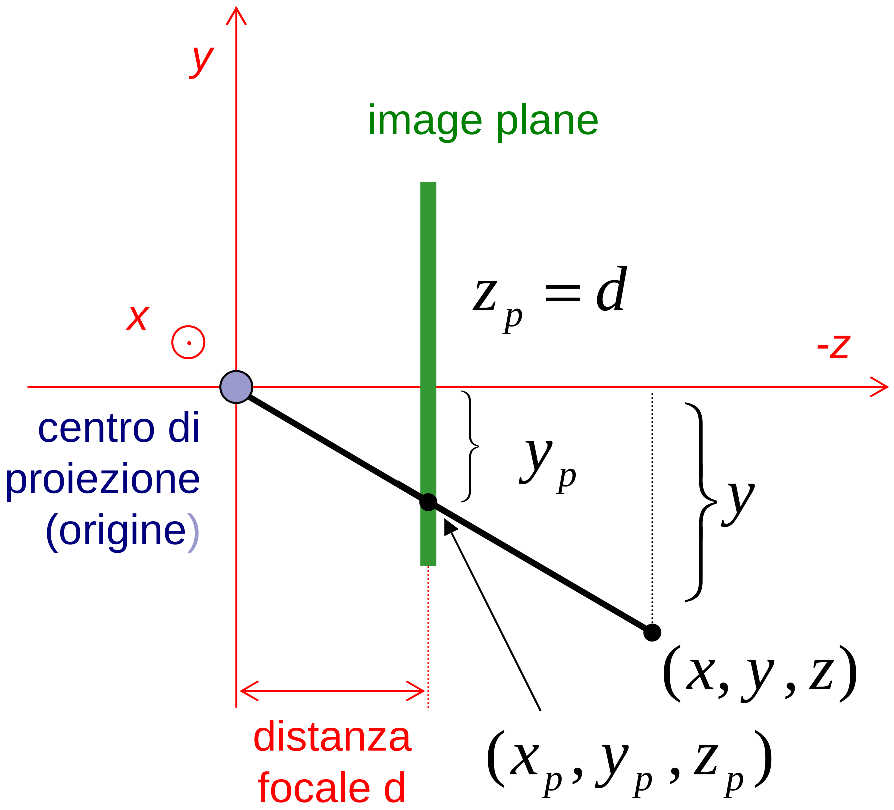
d infinito
(p. parallela)

Più distorsione prospettica.

Effetto "fish-eye" (grandangolo)

Proporzioni più mantenute

Effetto "zoom" (eg. vista dal satellite)



Triangoli simili

$$\frac{y_p}{d} = \frac{y}{z} \Rightarrow y_p = \frac{y}{z/d}$$

$$\frac{x_p}{d} = \frac{x}{z} \Rightarrow x_p = \frac{x}{z/d}$$

$$z_p = d$$

Nota:
NON è una trasformazione lineare
NON è *reversibile*

Proiezione prospettica: forma matriciale

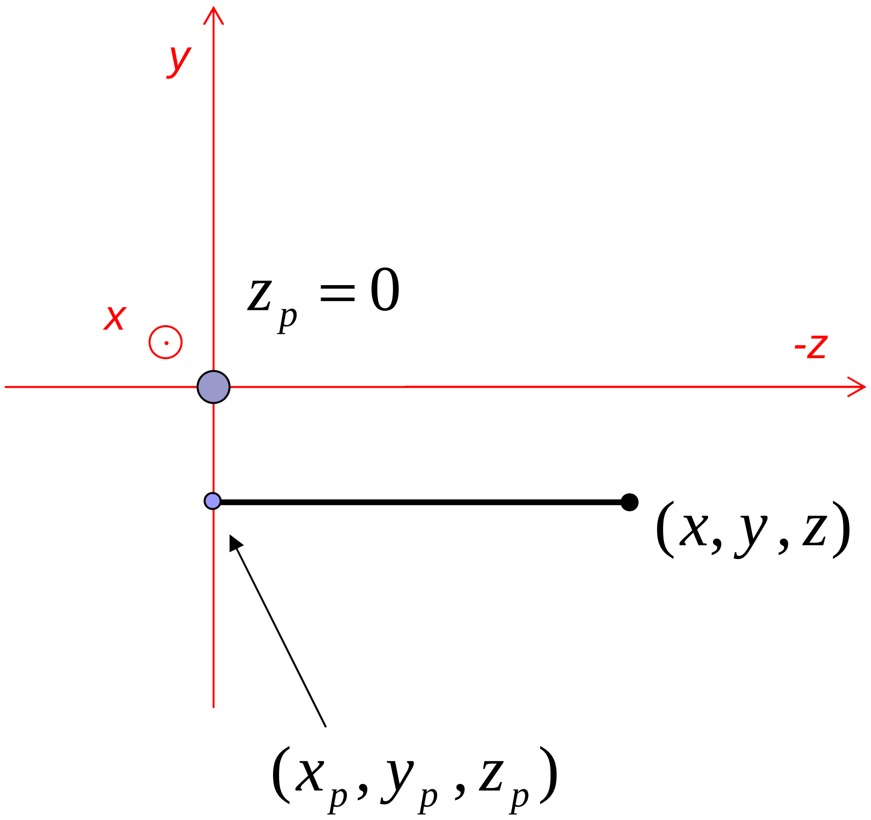
matrice di trasformazione
per la proiezione prospettica:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 0 \end{bmatrix}$$

questa operazione
si fa per ultima.
La 3 e 4
componente
ci saranno utili !

$$\mathbf{P}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ z/d \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{divisione per 4ta comp}} \begin{bmatrix} \dfrac{x}{z/d} \\ \dfrac{y}{z/d} \\ d \\ 1 \end{bmatrix}$$

Proiezione ortogonale sul piano XY



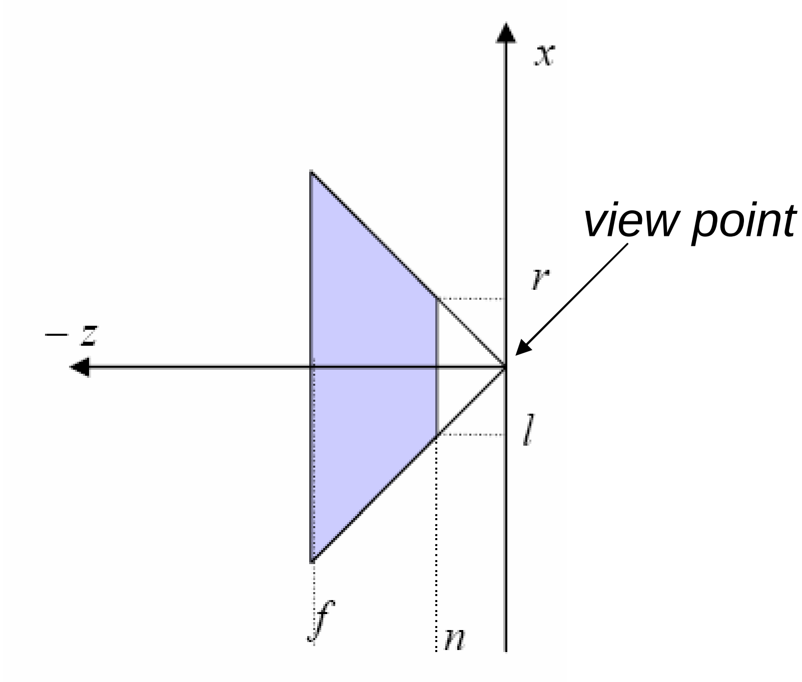
Basta buttar via la coordinata z

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

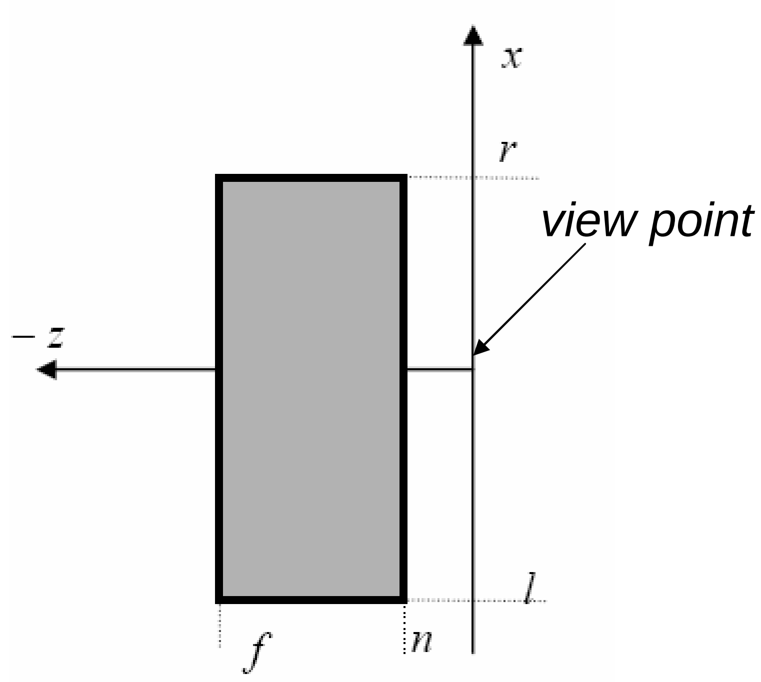
I volumi di vista

- Il volume di vista è la regione di spazio che viene proiettata sull’image plane, come nella realtà
- A differenza che nella realtà, questa regione si può limitare con un piano, detto *far plane*

Prospettico



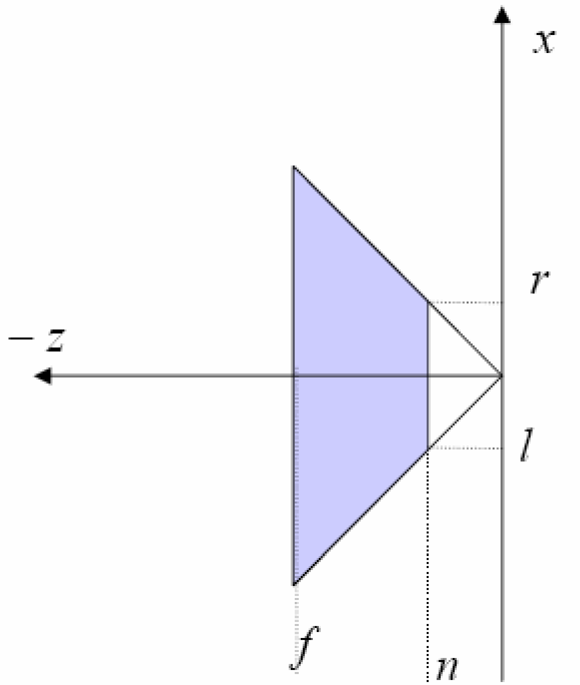
orografico



Volume di vista canonico

- Il volume di vista canonico e' definito dai piani *x=-1, x=1, y=-1,y=1, z=-1, z=1,* o piu' brevemente [-1,1]x[-1,1]x[-1,1]
- Sia che la proiezione sia prospettica che ortogonale, il volume di vista viene **trasformato** nel volume di vista canonico per effettuare più facilmente il clipping
- Dopo questa trasformazione si parla di *clip-coordinates*
- Si ma cos'è il clipping?

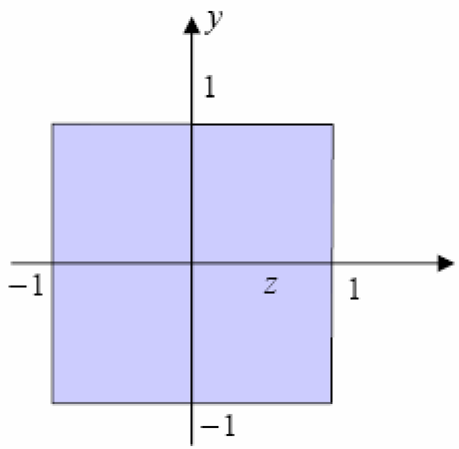
Dal volume di vista **prospettico** a quello canonico



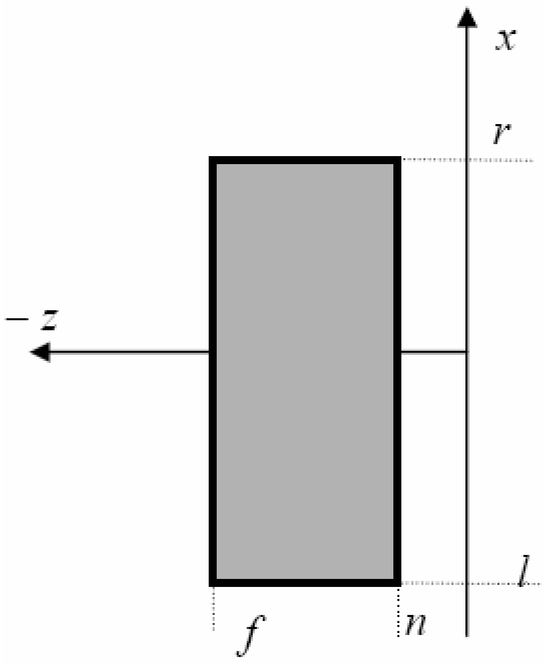
$$r = rigth$$
$$l = left$$
$$b = bottom$$
$$t = top$$
$$n = near$$
$$f = far$$

$$M_{per} = \begin{bmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-(f+n)}{f-n} & \frac{-2fn}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

M_{per}



Dal volume di vista **ortogonale** a quello canonico



$r = rigth$

$l = left$

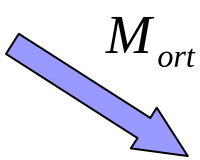
$b = bottom$

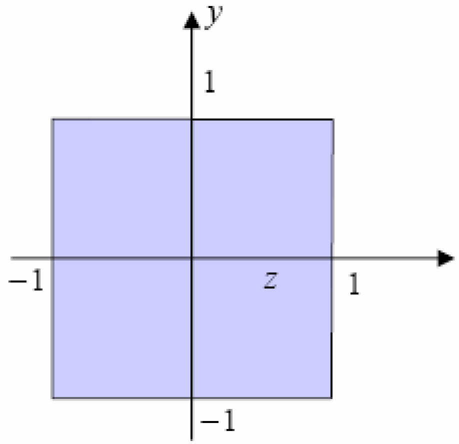
$t = top$

$n = near$

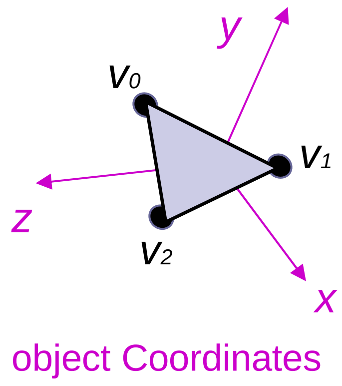
$f = far$

$$M_{ort} = \begin{bmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & -\frac{r+l}{r-l} \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & -\frac{t+b}{t-b} \\ 0 & 0 & \frac{2}{n-f} & -\frac{n+f}{n-f} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$





Il processo di trasformazione

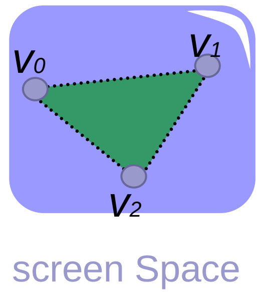


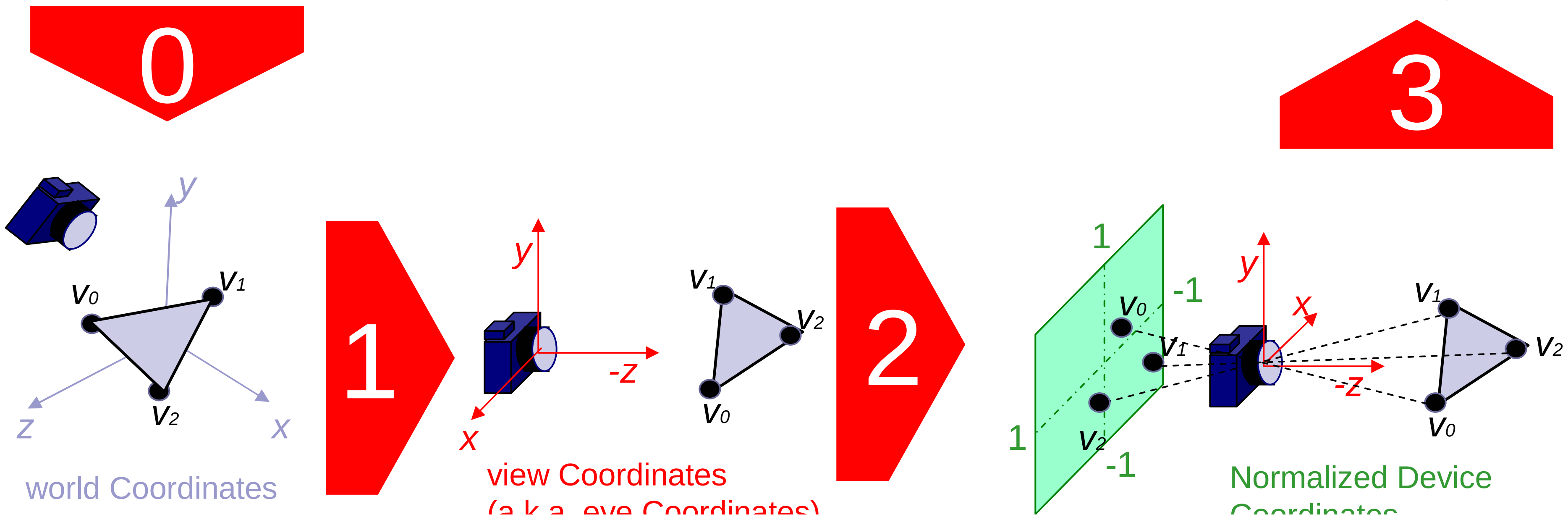
0) transformazione di modellazione

1) transformazione di vista

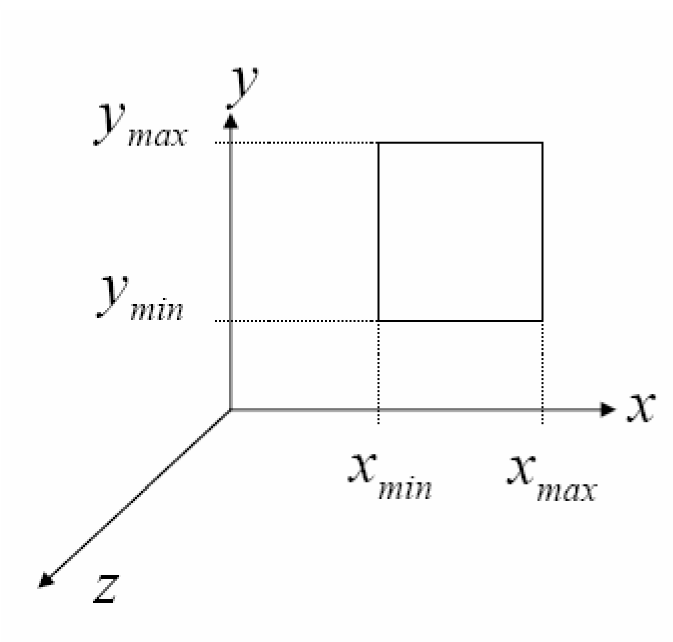
2) transformazione di proiezione

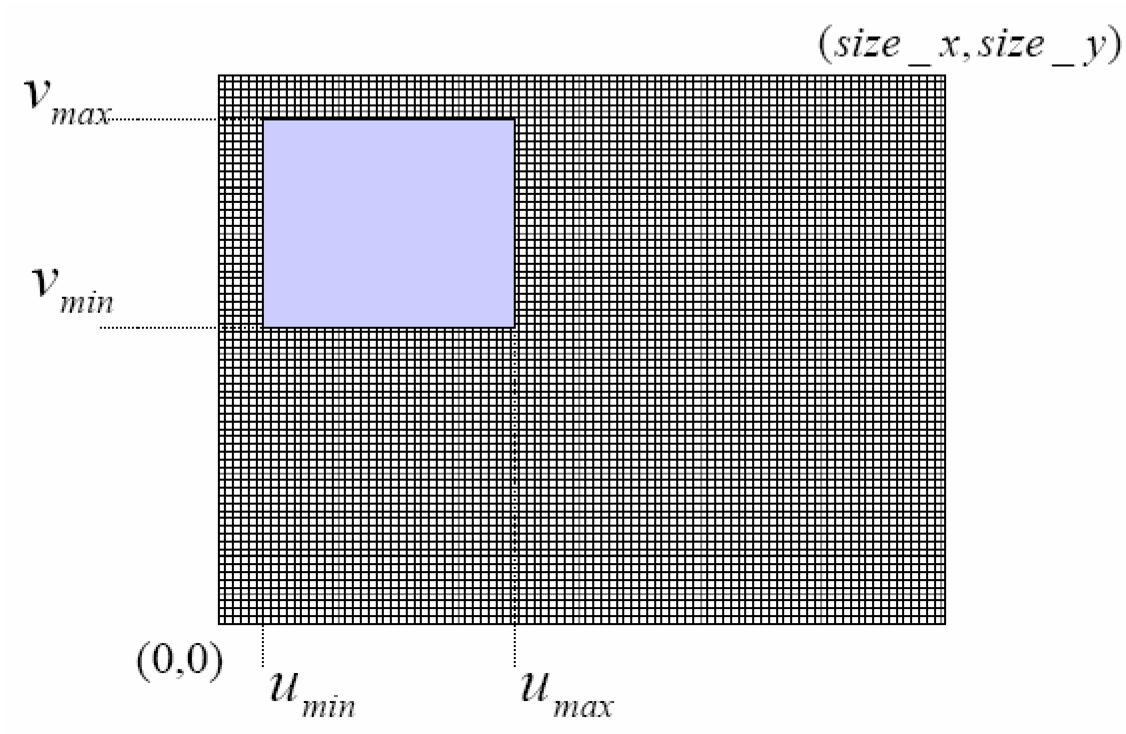
3) **transformazione di viewport**





- **Window**: left, right,bottom,top. La nostra finestra di vista nel piano di proiezione
- **Viewport**: dove viene visualizzata sullo schermo





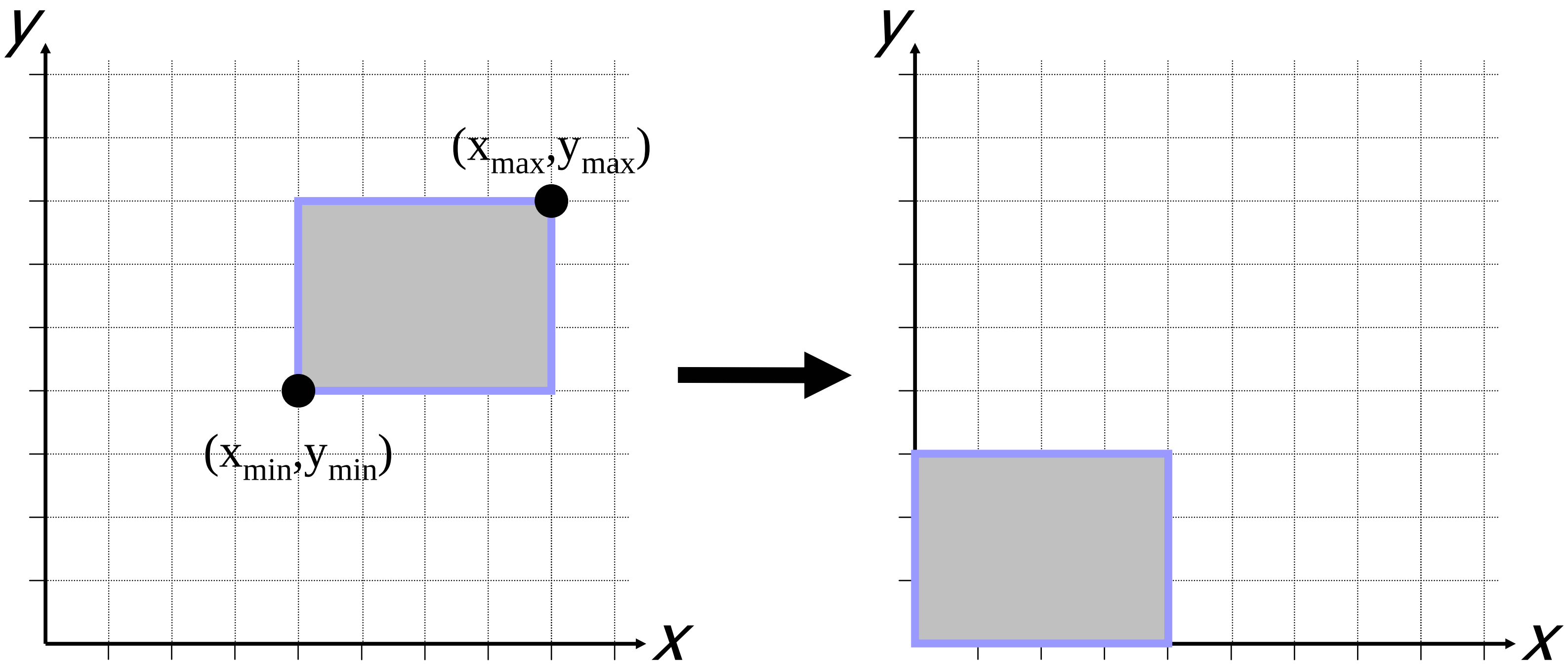
Trasformazione “window to viewport”

- La window è traslata nell’origine del sistema di coordinate;
- La dimensione della window è scalata sino ad essere uguale alla dimensione della viewport;
- La viewport è traslata nella posizione finale nel sistema di coordinate del dispositivo di output;

$$WV = \begin{bmatrix} 1 & 0 & u_{\min} \\ 0 & 1 & v_{\min} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{u_{\max} - u_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v_{\max} - v_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -u_{\min} \\ 0 & 1 & -v_{\min} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

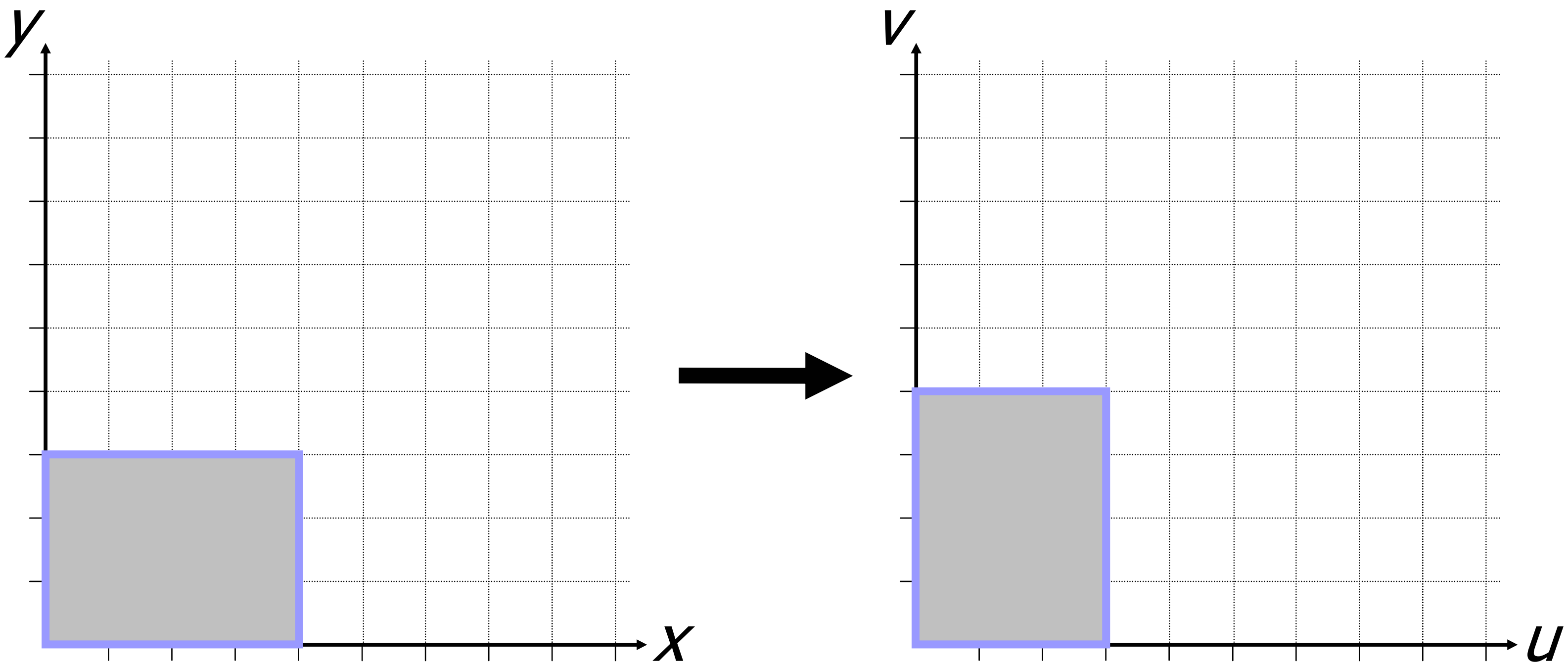
Trasformazione “window to viewport”

- 1 - La window è traslata nell’origine del sistema di coordinate;



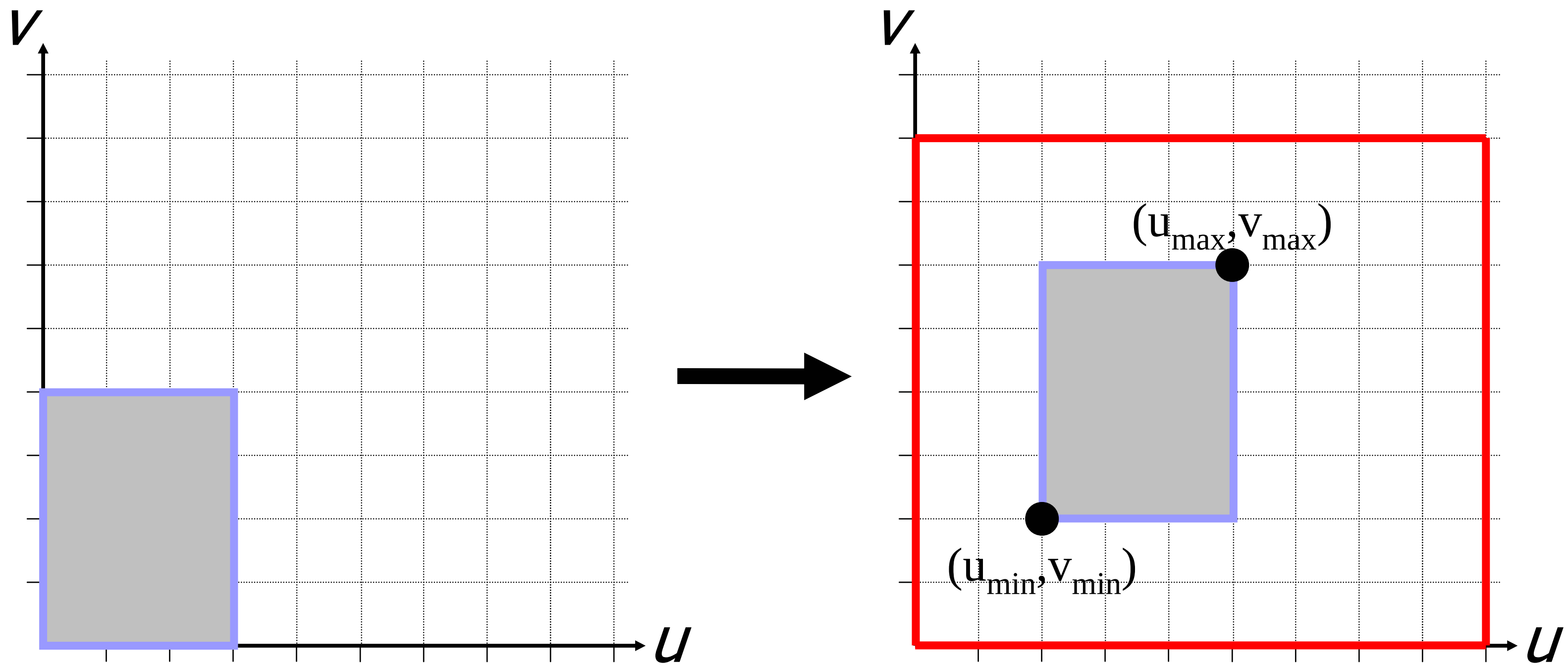
Trasformazione “window to viewport”

- 2 - La dimensione della window è scalata sino ad essere uguale alla dimensione della viewport;



Trasformazione “window to viewport”

- 3 - La viewport è traslata nella posizione finale nel sistema di coordinate del dispositivo di output;



Riassunto

	lunghezze	angoli	proporzioni	colineariltà
traslazione	V	V	V	V
rotazione	V	V	V	V
scalatura uniforme	X	V	V	V
scalatura non uniforme	X	X	V	V
shearing	X	X	V	V
proiezione ortigonale	X	X	V	V
trasf. affine generica	X	X	V	V
proiezione prospettica con rinormalizzazione	X	X	X	V